Les Cahiers de l'Analyse des Données
Vol. XIX - 1994 - n°1 - pp. 85-118.

INVARIANTS LOCAUX POUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES COMPRENANT L'ÉQUATION ASSOCIÉE À LA TRANSFORMATION DE FOURIER

[LOC. DÉR. PART.]

*HASSAN HAMOUD. Anwar**
*HAYEK Jamal***

1 Rappel: équation différentielle et transformation de FOURIER

Dans [REL. CONT. SPAT.], on rappelle que la transformation de FOURIER s'insère naturellement dans un groupe (dit: groupe de FOURIER-POINCARÉ) en sorte qu'à une fonction à valeur complexe est associé un ensemble continu de transformées qu'on peut considérer comme constituant une seule fonction définie sur une variété appropriée (dite: espace de FOURIER-MÖBIUS) et satisfaisant sur celle-ci à une certaine équation aux dérivées partielles qui est, essentiellement, celle de l'oscillateur harmonique.

Dans [CONNEX.] (non publié), J.-P. BENZÉCRI s'applique à définir une connexion associée à toute équation aux dérivées partielles analogue à celle de FOURIER-POINCARÉ. La complexité de cette étude fait désirer qu'on considère les invariants géométriques locaux dans un cadre moins général, et en partant d'exemples simples. Tel est l'objet du présent travail.

Partons de l'équation (plus exactement du système) posé à la fin du §5 de [REL. CONT. SPAT.]:

$$\partial_a = i\,\partial_{ac} \;\; ; \;\; \partial_c = i\,\partial_{cc} \;\; ; \;\; \partial_\beta = i\,(\partial_{aa} + a^2.\partial_{cc}) \;\; ;$$

ici, les deux membres de chaque équation doivent être compris comme des opérateurs, dont on affirme qu'ils ont même effet sur toute fonction f (fonction à valeur complexe de 3 variables réelles) satisfaisant au système.

(*) Université Pierre et Marie Curie et جامعة بغداد.
(**) Université Pierre et Marie Curie.

Les cahiers de l'analyse des données 0339-3097/94/01/85 34/$ 4.00/© Gauthier-Villars

Les variables sont désignées par {a, b, c} parce qu'elles ont été introduites comme des paramètres de certaines fonctions appelées "ondes quadratiques", lesqelles sont les transformées des mesures de DIRAC par le groupe de FOURIER-POINCARÉ. Comme cette interprétation ne servira pas ici avant le §9, nous préférons désigner les coordonnées locales par des lettres {t, x, z} qui servent ordinairement à cet effet (notamment dans l'équation de l'oscillateur harmonique, où t est le temps). On récrira donc le système, en le généralisant:

$$\partial_z = -i = i\,\partial_{zz} \quad ; \quad \partial_x = i\,\partial_{xz} \quad ;$$
$$\partial_t = i\,(A(t, x).\partial_{xx} + 2.B(t, x).\partial_{xz} + C(t, x).\partial_{zz}) \quad ;$$

où {A, B, C} sont des fonctions réelles; et nous parlerons de système S{A, B, C}, ou, simplement S. Le cas particulier associé au groupe de FOURIER-POINCARÉ correspond aux fonctions:

$$A(t, x) = 1 \quad ; \quad B(t, x) = 0 \quad ; \quad C(t, x) = x^2 \quad .$$

Considérons des propriétés générales que possède le système S{A, B, C}. La coordonnée z est une phase; en ce sens que, pour toute fonction f satisfaisant au système, on a la relation:

$$\forall\, z, z' : \; f(t, x, z+z') = f(t, x, z) \exp(-i.z') \quad ;$$

les sous-variétés de dimension 1 paramétrées par z, et sur chacune desquelles {t, x} sont constants, sont appelées fibres dans [CONNEX.]. De même, les variétés t=cte, paramétrées en {x, z}, sont appelées plaques dans [REL. CONT. SPAT.].

L'équation en {A, B, C}, dont le membre de gauche est ∂_t, s'interprète en disant que la dérivée première transversalement à la plaque est le produit par i d'une combinaison linéaire réelle des dérivées secondes de la fonction restreinte à la plaque. Plus généralement, le système S exprime que toute dérivée première (suivant un vecteur tangent quelconque) est le produit par i d'une combinaison linéaire réelle des dérivées secondes sur la plaque. On remarque que ces dérivées secondes ont une structure d'espace de polynômes inhomogènes de ℝ2; les termes ∂_{zz} et ∂_{xz}, correspondant aux degrés 0 et 1 (constantes et formes linéaires).

Même si, pour plus de simplicité, on écarte le cas (déjà abordé dans le §7 de [REL. CONT. SPAT.], et considéré ici au §5), où x est une variable vectorielle, on doit s'interroger sur le degré de généralisation maximum qu'on peut donner au système. Procédant comme dans [CONNEX.], on supposera que le cadre géométrique est une variété de dimension 3 sur laquelle est donnée une fibration, dont chaque fibre, de dimension 1, est graduée par une phase z, déterminée à une constante additive près; et le système SL sera donné en spécifiant, en chaque point, un système de coordonnées locales où la relation entre les dérivées partielles s'écrive comme ci-dessus; ou même, encore plus simplement:

$$\partial_z = -i = i\,\partial_{zz} \quad ; \quad \partial_x = i\,\partial_{xz} \quad ; \quad \partial_t = i\,\partial_{xx} \quad .$$

Il faut prendre garde au sens précis d'un tel système SL. Un système différentiel peut, dans tout système de coordonnées, être spécifié par des relations entre les dérivées partielles de la fonction f; dans notre cas, le système est linéaire et du second ordre. Pour certains systèmes différentiels SD, tout point admet un voisinage où est défini un système de coordonnées tel que SD prend une forme réduite simple valant sur tout ce voisinage: pour le système S{A, B, C}, on a même postulé ci-dessus l'existence d'un système global, {t, x, z}. Pour SL, on postule seulement qu'à tout point est associé un système de coordonnées locales dans lequel l'expression de SL est réduite en ce point; sans qu'il en soit ainsi, avec ces coordonnées, sur tout le voisinage.

Reste à préciser en quoi, même localement, SL est plus général que S. Avec SL, est défini, en chaque point, par le système de coordonnées, un jet d'ordre 2 de plaque fibrée; et en ce point, relativement à ce jet, on peut dire, comme ci-dessus pour S, que toute dérivée première (suivant un vecteur tangent quelconque) est produit par i d'une combinaison linéaire réelle des dérivées secondes sur la plaque.

2 Systèmes différentiels et feuilletages associés

Ici, nous poserons trois questions.

Premièrement, le champ des jets de plaque est-il intégrable à l'ordre 1: i.e. considéré comme champ d'éléments de contact d'ordre 1, définit-il un feuilletage de la variété par des plaques (de dimension 2).

Deuxièmement, à supposer qu'il soit intégrable à l'ordre 1, le champ des jets de plaque est-il intégrable à l'ordre 2: i.e., les plaques intégrales ont-elles avec les jets donnés un contact d'ordre 2 (non seulement même plan tangent mais même courbure).

Troisièmement, le champ de structure affine est-il intégrable: i.e., existe-t-il sur chaque plaque une structure affine (ou correspondance biunivoque avec un plan affin) induisant, en chaque point, la structure affine définie par le jet. Cette dernière question ne se pose proprement que dans le cas où x est une variable vectorielle; car, en dimension 1, une structure affine définie en chaque point par un jet d'ordre 2 peut être intégrée.

Nous montrerons un exemple simple de systèmes SL, où, l'intégrabilité à l'ordre 2 faisant défaut, les solutions f revêtent des formes auxquelles manquent certaines propriétés importantes du cas modèle associé au groupe de FOURIER POINCARÉ; et un second exemple où, en intégrant la structure affine d'un modèle invariant, on voit disparaître l'invariance relativement aux nouvelles coordonnées.

Dans les deux exemples, la variété de base est l'espace R^3 muni des coordonnées $\{t, x, z\}$. La phase z intervient trivialement, en sorte qu'on peut se restreindre au plan des $\{t, x\}$ où les jets de plaques ne sont que des jets de courbes. Il y a intégrabilité à l'ordre 1, avec pour équation des plaques intégrales: $t =$ cte. Le système est, de plus, invariant par translation.

Nous croyons plus clair de noter $\{h, u, w\}$ les coordonnées locales; le système s'écrivant:

$$\partial_w = -i \quad ; \quad \partial_h = i\,\partial_{uu} .$$

La différence entre les systèmes (1) et (2) réside dans les formules qui relient les coordonnées globales aux coordonnées locales. À l'origine on a:

$$(1):\ t = h - u^2 \ ; \ x = u \quad ; \ z = w \ ;$$

$$(2):\ t = h \quad ; x = u - u^2 \ ; \ z = w \ ;$$

au voisinage d'un point quelconque $\{t^\circ, x^\circ, z^\circ\}$ on a:

$$(1):\ t = t^\circ + h - u^2 \ ; \ x = x^\circ + u \quad ; \ z = z^\circ + w \ ;$$

$$(2):\ t = t^\circ + h \quad ; \ x = x^\circ + u - u^2 \ ; \ z = z^\circ + w \ .$$

Dans le cas (1) il n'y a pas d'intégrabilité à l'ordre 2; car, en bref, dans le plan (t, x) les plaques sont des droites et les éléments de contact sont les paraboles paramétrées par u (avec h=0). Dans le cas (2) il y a intégrabilité à l'ordre (2), car les éléments de contact n'ont pas de courbure; on peut, en reparamétrant l'axe des x mettre en évidence la structure affine globale; mais l'invariance disparaît.

On doit transcrire l'équation $\partial_h = i\,\partial_{uu}$ en une équation liant les coordonnées $\{t, x\}$; il vient, à l'origine, pour une fonction $f(t, x)$:

$$(1):\ \partial_h f \ = \partial_h f(h-u^2, u) \ = \partial_t f \qquad ;$$

$$(1):\ \partial_{uu} f = \partial_{uu} f(h-u^2, u) = \partial_{xx} f - 2.\partial_t f \ ;$$

d'où l'équation valable partout en $\{t, x\}$:

$$(1): \partial_t = i\,(\partial_{xx} - 2.\partial_t) \quad ;$$

$$(1): \partial_t = i\,(1/(1+2i))\,\partial_{xx} = i\,((1-2i)/5)\,\partial_{xx} \;;$$

ou, plus généralement, en remplaçant le nombre 2 par un paramètre *a*:

$$(1a): \partial_t = (i+a)\,(1/(1+a^2))\,\partial_{xx} \;;$$

on notera que, si $a \neq 0$, (1a) sort du format S{A, B, C}, parce que le coefficient de ∂xx n'est pas réel.

L'équation (1a) s'intègre à partir de la donnée de f sur (t=0); il suffit de se restreindre au cas d'une exponentielle complexe (auquel le cas général se réduit par décomposition en intégrale de FOURIER):

$$(1a): f(0, x) = \exp(i\,\Omega.x) \quad ; \quad \partial_{xx} f = -\Omega^2 f \;;$$

$$(1a): f(t, x) = \exp(-\Omega^2.(i+a).(1/(1+a^2)).t \;+\; i.\Omega.x) \;;$$

$$(1a): f(t, x) = \exp(-a.\Omega^2.(1/(1+a^2)).t) \;.\; \exp(-it.\Omega^2/(1+a^2) + ix.\Omega) \;;$$

le premier facteur est une exponentielle réelle qui, pour $a \neq 0$, détruit l'unitarité du passage de $f(0, x)$ à $f(t, x)$. Et il n'apparaît pas possible de rétablir l'unitarité en changeant l'échelle de la coordonnée x des plaques en fonction de t, parce que le coefficient de l'exponentielle est fonction de Ω.

On procède de même pour l'exemple (2).

$$(2): \partial_h f \;= \partial_h f(h, u-u^2) \;= \partial_t f \qquad ;$$

$$(2): \partial_{uu} f = \partial_{uu} f(h, u-u^2) = \partial_{xx} f - 2.\partial_x f \;;$$

d'où l'équation homogène valable partout en {t, x}:

$$(2): \partial_t = i\,(\partial_{xx} - 2.\partial_x) \quad ;$$

ou, avec un paramètre b:

$$(2b): \partial_t = i\,(\partial_{xx} - b.\partial_x) \quad ;$$

comme pour (1), on se restreint au cas d'une donnée exponentielle sur (t=0):

$$(2b): f(0, x) = \exp(i\,\Omega.x) \;;\; \partial_x f = i.\Omega f \;;\; \partial_{xx} f = -\Omega^2 f \;;$$

$$(2b): f(t, x) = \exp((b\Omega - i\Omega^2).t \;+\; i.\Omega.x) \;;$$

$$(2b): f(t, x) = \exp(b.\Omega.t) \;.\; \exp(it.\Omega^2 + ix.\Omega) \;.$$

Pour intégrer la structure affine, on peut introduire un paramétrage sur tout l'axe des x par un y (toujours positif) satisfaisant à l'équation:

$$(2'): \partial_{xx}\, y - b.\partial_x\, y = 0 \quad ; \quad \partial_x\, y - b\, y = 0 \,;$$

$$(2'): y = \exp(b.x) \quad ; \quad x = (1/b)\, \mathrm{Log}(y) \,;$$

$$(2'): \partial_x = b.y.\partial_y \quad ; \partial_{xx} = b^2.y^2.\partial_{yy} + b^2.y.\partial_y \,;$$

$$(2'): \partial_{xx} - b.\partial_x = b^2.y^2.\partial_{yy} \,;$$

l'équation (2b) s'écrit alors, dans les variables {t, y}:

$$(2'): \partial_t = i\, b^2.y^2.\partial_{yy} \,;$$

on retrouve ainsi un système du type S{A, B, C} introduit ci-dessus, avec $A=b^2.x^2$ et B=C=0. Et l'on note que, sur cet exemple, le coefficient A non constant en x pour t donné est associé à l'absence d'unitarité.

3 Changements de coordonnées distingués et invariants

Dans l'écriture du système général S{A, B, C}, il y a une certaine latitude du fait des changemenents de coordonnées. On s'interroge sur la forme réduite la plus simple dont les coefficients seraient des invariants analogues à une courbure. On doit préalablement fixer les changements de coordonnées permis.

En bref, le système spécifie que la différentielle première dans l'espace s'exprime comme le produit par *i* de combinaisons linéaires réelles de la différentielle seconde sur la plaque: ce qu'on écrira:

$$D1 \approx D2.$$

Pour donner un sens stable à cette formule, il faut que chaque plaque ait une structure affine fixée. La plaque {x, z} est assimilée au plan affin. Pour obtenir une forme réduite, seuls sont permis les changements de coordonnées respectant la structure affine. Tout autre changement détruit la forme D1 ≈ D2; car, en bref, ainsi qu'on l'a vu sur les exemples, il introduit dans D2 des termes en D1; lesquels, du fait du coefficient *i*, ne peuvent être transférés dans le premier membre.

Le changement de coordonnées considéré sera donc:

$$t' = \beta(t) \quad ;$$

$$x' = a(t).x + b(t) \quad ;$$

$$z' = c(t).x + d(t) + z \;.$$

Il faut trouver l'expression l'équation S{A', B', C'} dans les nouvelles coordonnées. Afin d'abréger les formules on écrira (T, X, Z) pour (∂_t, ∂_x, ∂_z); et, de même, (T', X', Z') pour ($\partial_{t'}$, $\partial_{x'}$, $\partial_{z'}$); (où $\partial x'$ est l'opérateur de dérivation par rapport à x', dans le système de coordonnées {t', x', z'}...). Les relations entre {T, X, Z} et {T', X', Z'} peuvent être comprises comme des relations entre champs de vecteurs; des formules de changement de coordonnées, il résulte qu'on a:

$$T = \beta'.T' + (a'.x + b').X' + (c'.x + d').Z' \quad ;$$

$$X = \qquad a.X' + \qquad c.Z' \quad ;$$

$$Z = \qquad Z' \quad ;$$

Commentons ces formules. En tout point de la variété tridimensionnelle de base, sont définis les deux jeux de coordonnées {t, x, z}, {t', x', z'}; et, par conséquent, les deux jeux de vecteurs tangents de base; et aussi les fonctions de t: {ß, a, b, c, d}, ainsi que leurs dérivées par rapport à t. Ceci permet de donner un sens non ambigu aux combinaisons linéaires de vecteurs que comportent les formules ci-dessus. Les relations écrites entre les champs valent également entre les dérivations considérées comme des opérateurs sur les fonctions numériques (réelles ou complexes).

Soit maintenant à transformer l'équation S{A, B, C}. On a:

$$T = i\,(A.X^2 + 2B.XZ + CZ^2) \;;$$

$$T = i.A.X^2 + 2.B.X - i.C \quad ;$$

soit, en substituant aux {T, X, Z} leur expression en {T', X', Z'}:

$$\beta'.T' + (a'.x + b').X' + (c'.x + d').Z' =$$

$$i.A.(a.X'+c.Z') \circ (a.X'+c.Z') + 2.B.(a.X'+c.Z') - i.C \;;$$

dans cette formule le symbole ‹o› exprime la composition des opérateurs différentiels; comme seule intervient la différenciation sur la plaque, et que les coefficients, fonctions de t, sont constants sur la plaque, on peut, dans la composition, calculer comme sur des polynômes usuels; en tenant compte de ce que Z = Z' = -i, il vient:

$$\beta'.T' = i.Aa^2.X'^2 + (2a(Ac+B) - (a'x+b')).X' + i.((c'x+d') - (Ac^2+2Bc+C)) \,.$$

Nous chercherons les changements de coordonnées respectant les trois formes réduites suivantes, proposées dans l'ordre de complexité croissante:

$S\{1,0,0\}$; $S\{1,0,x^2\}$; $S\{1,0,C\}$;

l'étude du dernier de ces systèmes permettra de définir un invariant local.

premier cas : $S\{1, 0, 0\}$: en identifiant l'équation transformée avec $S\{1, 0, 0\}$, on caractérise les changements de coordonnées conservant cette forme; il vient:

$ß' = a^2$; $a' = c' = 0$; i.e. a et c constants, donc ß';

$2ac = b'$; $c^2 = d'$;

il y a donc deux paramètres $\{a, c\}$ qu'on peut choisir de façon quelconque; d'où il résulte que $\{ß(t), b(t), d(t)\}$ sont des fonctions linéaires de *t* ayant pour dérivées respectives: $\{a^2, 2ac, c^2\}$.

deuxième cas : $S\{1, 0, x^2\}$: on procède de même par identification avec l'équation tranformée; d'où le système:

$ß' = a^2$; $a' = 0$; $2ac = b'$;

$a^2 x'^2 = x^2 + c^2 - (c'x+d')$;

en substituant à x' son expression, $x' = ax + b$, il vient:

$a^2 = 1$; $b^2 + 2abx = (c^2-d') - c'x$;

prenons la valeur a=1; on a le système:

$b' = 2c$; $c' = -2b$; $d' = c^2 - b^2$;

il en résulte que:

$bb' + cc' = 0$; $b^2 + c^2 = r^2$,

où r désigne un paramètre constant positif; il vient alors:

$b = r.\sin(2(t-t°))$; $c = r.\cos(2(t-t°))$;

$d' = r^2.\cos(4(t-t°))$; $d = d° + (1/4)r^2.\sin(4(t-t°))$;

formules où t° et d° sont des constantes arbitraires.

Pour a=-1, il suffit de considérer le cas particulier le plus simple: b=c=d=0, les autres cas s'obtenant par composition avec des changements de coordonnées pour lesquels a=1.

troisième cas : S{1, 0, C}: de l'identification avec S{1, 0, C'} résulte le système:

$$ß' = a^2 \; ; \; a' = 0 \; ; \; b' = 2ac \; ;$$

la fonction C' est donnée par:

$$a^2.C' = C + c^2 - (c'x+d') \quad ;$$

$$a^2.C' = C + (c^2-d') - c'x \quad .$$

Il vaut la peine de répéter ici quelle est la nature des êtres mathématiques qui figurent dans cette formule ou qui la conditionnent. Est donné, sur la variété de base, un système différentiel qui, relativement à un système de coordonnées {t, x, z} approprié, prend la forme S{1, 0, C}, où C désigne une fonction constante sur les fibres (i.e., en termes analytiques, une fonction de {t, x} ne dépendant pas de z}. Concurremment avec le système de coordonnées {t, x, z}, on en considère un autre, relié au premier par les formules de transformations que nous rappelons, en tenant compte des restrictions déjà vues:

$$t' = a^2.t + ß° \quad ; \quad x' = a.x + b(t) \quad ; \quad z' = (b'(t)/(2a)).x + d(t) + z \quad ;$$

dans ces formules, a et ß° sont des constantes; b(t) et d(t) sont des fonctions arbitraires de t. À ce nouveau système de coordonnées, est associée une fonction C' qui est, comme C, une fonction définie sur la variété de base et constante sur les fibres. On peut écrire la relation entre fonctions:

$$a^2.C' = C + (-b''(t)/(2a)).x + ((b'(t)/(2a))^2 - d'(t)) \,.$$

Puisque le choix de b(t) et d(t) est libre, donc, *a fortiori*, celui de b" et de d', la formule ci-dessus suggère que C est définie à une fonction près linéaire en x dont les coefficients sont eux-mêmes des fonctions de t; mais il reste à préciser cette suggestion en tenant compte du fait que la fonction C est subordonnée au choix d'un système de coordonnées.

Comme d'usage pour éliminer une fonction linéaire, on considère la dérivée seconde. Ici, il faut, pour C et C', utiliser respectivement les opérateurs de dérivation X et X' associés au même système de coordonnées; il vient:

$$XX\, a^2.C' = XX\, C \, ;$$

d'où, compte tenu de ce que X = a.X' + cZ', et que les fonctions C et C' ne dépendent pas de z ni de z':

$$a^4.\, X'X'\, C' = XX\, C\ ;$$

il apparaît que la fonction XX C prend des valeurs proportionnelles dans tout système distingué de coordonnées (i.e. tout système où l'équation considérée prend la forme S{1, 0, C}). Quant à la fonction C, on peut lui donner toutes les formes compatibles avec la valeur de XX C : il suffit, a étant égal à 1, de donner à b" et d' les valeurs appropriées.

Notons Δ = XX C ; on peut écrire:

$$a^4.\Delta' = \Delta \quad ; \quad t' = a^2.t + \beta^\circ \quad ;$$

ces formules s'interprètent bien en disant que Δ est dimensionné comme t^{-2}; ou, si l'on se réfère à l'exemple d'une équation de SCHRÖDINDER, comme l'inverse du carré d'un temps.

Reste à montrer que la fonction Δ = XX C peut être considérée comme une courbure; en particulier, dans les deux cas considérés d'abord, il s'agit respectivement d'une courbure nulle et d'une courbure constante.

4 Connexion associée à un système différentiel S{1, 0, C} sur l'espace tridimensionnel des (t, x, z)

Rappelons que, sur une variété V munie d'une structure de type déterminé, la notion de connexion est définie en associant à tout chemin C reliant deux points M et N de V, un isomorphisme IC(TM, TN) entre les espaces vectoriels TM et TN, tangents à V en M et N. Ainsi à un vecteur vM de TM, correspond un vecteur vN de TN; et l'on dit que vN est obtenu en transportant vM de M en N suivant le chemin C.

En général, à un chemin C ayant pour origine et pour extrémité un même point M, correspond un isomorphisme que n'est pas l'identité; et plus particulièrement, à un circuit infinitésimal qu'on peut identifier à un bivecteur, correspond une transformation linéaire infinitésimale dépendant linéairement de ce bivecteur: telle est la notion de courbure; dont un exemple élémentaire se trouve en géométrie des surfaces, le cas le plus simple étant celui de la sphère.

Poursuivant l'étude du système S{1, 0, C} considéré au §3, on se propose d'associer à ce système une connexion sur l'espace des (t, x, z); il apparaîtra que la courbure associée à cette connexion s'identifie à l'invariant Δ.

On a vu au §3 que dans les changements de coordonnées conservant la forme du système S, la coordonnée z sur chaque fibre est conservée à une constante additive près: il est donc naturel de postuler que si on transporte, suivant un chemin C=(M, N) quelconque, un vecteur (0, 0, Δz) tangent en M à la fibre passant par ce point, on obtient le vecteur de mêmes composantes tangent à la fibre passant par N.

De même, puisque les changements de coordonnées admissibles sont linéaires sur chaque plaque, on postulera que si on transporte, suivant un chemin C=(M, N) inclus dans une plaque, un vecteur (0, Δx, Δz) tangent en M à cette plaque, on obtient le vecteur de mêmes composantes tangent à la plaque en N.

Dans le cas d'un chemin C=(M, N) quelconque, il n'y a pas lieu de demander que le vecteur en N ait les mêmes composantes: car une telle égalité n'est pas invariante par les changements de coordonnées admissibles. Mais il résulte de la loi choisie ci-après pour le transport, qu'à un vecteur (0, Δx, Δz) en M correspond un vecteur (0, Δx, $\Delta z'$) en N; la valeur précise de la composante $\Delta z'$, dépendant seule du chemin suivi.

De plus, ainsi qu'on l'a dit au §1, tout système S{A, B, C}, et en particulier le système S{1, 0, C}, établit en chaque point M de l'espace des {t, x, z} un isomorphisme entre l'espace tangent tout entier (tridimensionnel) et le carré tensoriel symétrique de l'espace tangent à la plaque. Il est naturel de demander que cet isomorphisme soit respecté par la connexion. Sous cette condition, le transport, suivant C=(M, N), de l'espace tangent PM à la plaque en M sur l'espace tangent PN à la plaque en N, détermine le transport du carré tensoriel symétrique de PM sur celui de PN; et donc, *ipso facto*, celui de l'espace tangent TM (tridimensionnel), sur TN.

Il ne reste plus qu'à définir le transport de PM sur PN et à en étudier les propriétés. (En d'autres termes, au lieu d'une connexion sur le fibré tangent tridimensionnel, à l'espace des {t, x, z}, on considère une connexion sur le sous-fibré des espaces tangents aux plaques). Nous utiliserons des coordonnées admissibles particulières, les {t, x, z}; mais en vérifiant, à chaque pas, que les constructions effectuées ne dépendent que du système S{1, 0, C}, non du choix des coordonnées.

Il s'agit de définir le transport, à partir d'un point M, suivant un élément d'arc {Δt, Δx, Δz}; comme à un élément d'arc {0, Δx, Δz} est associé un simple transport parallèle dans la plaque, le problème peut se résoudre en définissant un transport d'une plaque Pl(t) sur une plaque infiniment voisine, Pl(t+Δt). Ce transport ne sera pas globalement linéaire (comme le serait un isomorphisme de structure affine) mais aura, en tout point M de Pl(t), une différentielle définissant le transport parallèle vers un point N de Pl(t+Δt).

Un transport de Pl(t) vers Pl(t+Δt) et au delà, peut être défini par un faisceau de lignes de flux transverses au plaques: ce faisceau ne sera pas déterminé de manière unique; mais de telle sorte que la différentielle, qui seule importe, soit la même quel que soit le faisceau choisi.

De façon précise, sur la plaque Pl(t), le champs des vecteurs tangents aux lignes de flux, est celui associé au carré tensoriel d'un champs de vecteur constant tangent à la plaque. Si (cf. *supra*) on prend pour vecteur constant X, le champ transverse est (à un coefficient constant près):

$$T - C.Z \approx i.X^2 \quad ;$$

en prenant au lieu de X, (X + s.Z), où s est un scalaire réel quelconque, on aura (compte tenu de ce que Z = -i):

$$T - (2s.X + s^2.Z + C.Z) \approx i.(X + s.Z)^2 \quad ;$$

Dans cette formule, le champs représenté par le membre de gauche ne dépend du point de la plaque Pl(t) que par le terme C.Z qui lui-même est indépendent du choix de s; par conséquent, la différentielle ne dépend pas de s; et l'on voit, de plus (cf. supra) qu'à un vecteur $(0, \Delta u, \Delta w)$ sur Pl(t°) correspond un vecteur $(0, \Delta u, \Delta w')$ sur $Pl(t+\Delta t)$, avec $\Delta w' = \Delta w - \partial C.\Delta u.\Delta t$; (où ∂C désigne la dérivée partielle X C de C par rapport à x).

Ainsi, sur le circuit (en parallélogramme fermé):

$$(0, 0, 0) \ldots (\Delta t, 0, 0) \ldots (\Delta t, \Delta x, 0) \ldots (0, \Delta x, 0) \ldots (0, 0, 0) \ ,$$

on aura la suite de cinq vecteurs transportés (où la mention *idem* désigne un vecteur identique au précédent figurant dans la suite):

$$(0, \Delta u, \Delta w) \ldots (0, \Delta u, \Delta w\text{-}\partial C\Delta u\Delta t) \ldots \textit{idem} \ldots$$

$$(0, \Delta u, \Delta w\text{-}\partial C\Delta u\Delta t+(\partial C+\partial\partial C\Delta x)\Delta u\Delta t) \ldots \textit{idem} \ ;$$

soit, au total, pour effet de courbure:

$$(0, \Delta u, \Delta w) \ldots (0, \Delta u, \Delta w+\partial\partial C.\Delta x\Delta t\Delta u) = (0, \Delta u, \Delta wf);$$

i.e. la transformation linéaire infinitésimale:

$$\begin{vmatrix} \Delta u \\ \Delta wf \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \partial\partial C.\Delta x.\Delta t & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \Delta u \\ \Delta w \end{vmatrix} ;$$

la dérivée seconde XX C, notée ici $\partial\partial C$, est notée simplement Δ à la fin du §3. On peut vérifier que cette courbure a la dimension t^{-2}: car le produit $\partial\partial C.\Delta x\Delta t\Delta u$ est sans dimension (étant homogène à Δw, composante sur l'axe des z), et $\Delta x\Delta u\Delta t$ a la dimension de $x^2.t$ donc de t^2.

5 Cas où x est une variable multidimensionnelle

Dans ce §, on reprend les calculs précédents, en les généralisant. L'exposé des §§ 1 à 4 part du système différentiel considéré à la fin du §5 de [REL. CONT. SPAT.] pour définir une classe de systèmes S{A, B, C}; puis, d'après des exemples considérés au §2, on se restreint à une sous-classe de ces systèmes, pour lesquels on calcule, au §3, des invariants analogues à une courbure.

Ayant en vue le système différentiel posé au §8 de [REL. CONT. SPAT.], on se place désormais dans un espace où les coordonnées {t, x, z} et les transformations permises sur celles-ci généralisent la structure étudiée au §3.

Comme dans les §§1 à 4, la coordonnée z est une phase; mais les (x, t) sont des variables vectorielles, dont les composantes sont désignées par des indices: x est dans R_J; et t est dans un espace, noté R_S, qui, par sa dimension, peut être identifié avec le carré tensoriel symétrique de R_J. Autrement dit: cardS = cardJ . (cardJ+1) / 2 ; et, si l'isomorphisme est fixé, un indice s correspond à une paire non ordonnée {j, j'}.

Sont admis les changements de coordonnées de la forme:

$$t' = \beta(t) \quad ;$$

$$x'_h = a_h^j(t) . x_j + b_h(t) \quad ;$$

$$z' = c^j(t) . x_j + d(t) + z \quad ;$$

ici, on fait d'abord les hypothèses suivantes: ß est un difféomorphisme quelconque de R_S; $a_J{}^J$, est un automorphisme linéaire de R_J dépendant de t comme d'un paramètre multidimensionnel; {b_J, c^J, d} sont, de même, des fonctions de t prenant respectivement leurs valeurs dans R_J, dans son dual R^J et dans R.

En termes géométriques, l'espace ambiant admet un feuilletage en plaques, t=cte; chaque plaque est munie d'une structure affine, déterminée par les coordonnées {x, z}; avec une fibration par les droites parallèles x=cte, paramétrées en z.

Afin d'écrire un système différentiel S{A, B, C}, on note les dérivations par des capitales: {T^s, X^j, Z} pour {∂_{ts}, ∂_{xj}, ∂_z}. De plus, on groupe les indices dans les produits de dérivations; soit $XX^{jj'}$ pour $X^j.X^{j'}$:

$$Z = -i \quad ;$$

$$T^s = i\,.A^s{}_{jj'}(t, x)\,.\,XX^{jj'} + 2.B^s{}_j(t, x)\,.\,X^j - i\,.C^s(t, x) \quad ;$$

où {A, B, C} sont des fonctions tensorielles réelles de {t, x}; avec sur A la condition de symétrie $\forall$ s, j, j': $A^s{}_{jj'} = A^s{}_{j'j}$.

Par analogie avec le §3, notre but serait, *a priori,* de préciser sous quelles conditions, R_S étant identifié au sous-espace symétrique, $R_J \otimes_{sym} R_J$, du produit tensoriel $R_J \otimes R_J$, un système peut, globalement, être réduit à la forme:

$$\forall\ s=\{j,j'\}\ :\ T^s = i.XX^{jj'} - i.C^s(t, x) \quad ;$$

où, en d'autre termes, B est nul; et le tenseur A définit l'inclusion de R_S dans $R_J \otimes R_J$; ce qu'on écrira parfois, en bref: A=1 (plus précisément, les composantes non nulles de A sont $A^{\{j,j\}}{}_{jj} = 1$; et, si $j \neq j'$, $A^{\{j,j'\}}{}_{jj'} = 1/2$).

Mais si l'on se reporte à [REL. CONT. SPAT.], §8, on trouve seulement démontré que les fonctions étendues à l'espace de FOURIER-MÖBIUS sont liées par un système qui peut, *sur chaque plaque*, prendre la forme réduite proposée ci-dessus. En fait, il apparaîtra que, pour assurer cette propriété, il suffit de poser des conditions moins strictes (cf. Remarque, *in fine*):

$$T^s = i\,.A^s{}_{jj'}(t)\,.\,XX^{jj'} + 2.B^s{}_j(t, x)\,.\,X^j - i.C^s(t, x) \quad ;$$

où, pour tout t, $A^s{}_{jj'}(t)$ définit un isomorphisme de R_S sur le sous-espace symétrique, $R_J \otimes_{sym} R_J$; et le tenseur $B^s{}_j$ dépend linéairement de x_J.

Comme dans les §§1 à 3, les deux membres de chaque équation s sont des opérateurs, dont on affirme qu'ils ont même effet sur toute fonction *f* (fonction à valeur complexe de variables réelles t_S, x_J, z) satisfaisant au système. En récrivant:

$$T^s = i\,(A^s{}_{jj'}(t)\,.\,XX^{jj'} + 2.B^s{}_j(t, x)\,.\,X^jZ + C^s(t, x)\,.\,ZZ) \quad ,$$

on voit qu'ici encore, le système S exprime que toute dérivée première (suivant un vecteur tangent quelconque) est produit par *i* d'une combinaison linéaire réelle des dérivées secondes sur la plaque; ces dérivées secondes ont une structure d'espace de polynômes inhomogènes du second degré; avec les termes ∂_{zz} et ∂_{xz}, correspondant aux degrés 0 et 1 (constantes et formes linéaires).

Il faut trouver l'expression nouvelle, S{A', B', C'}, d'une équation S{A, B, C}, après un changement de coordonnées de la forme posée ci-dessus. En procédant comme au §3, on trouve, entre opérateurs de dérivation, les relations:

$$T^s = {}^s\beta_v \,.\, T'^v + ({}^s a_h{}^j \,.\, x_j + {}^s b_h) \,.\, X'^h + ({}^s c^j \,.\, x_j + {}^s d).Z' \;;$$

$$X^j = a_h{}^j.X'^h + c^j.Z' \;;$$

$$Z = Z' \;;$$

dans ces formules, on doit, selon la convention d'EINSTEIN, sommer par rapport aux indices figurant deux fois (en position basse et haute); de plus, un indice s en haut avant ß, a, b, c ou d, symbolise la dérivation T^s: par exemple: ${}^s\beta_{s'} = \partial\beta_{s'} / \partial t_s$.

Pour plus de clarté, nous désignons par {j, g} (resp. {h,k}) des indices de l'ensemble J avant transformation (resp. après); et de même s, puis r, pour les indices de S ; tandis que le '" signale les dérivations, (X'), ou les composantes tensorielles, (A', B', C'), après transformation.

Le système transformé s'écrit, comme au §3, en mettant -i au lieu de la dérivation Z=Z' :

$$ {}^s\beta_v \,.\, T'^v + ({}^s a_h{}^j \,.\, x_j + {}^s b_h) \,.\, X'^h - i \,.\, ({}^s c^j \,.\, x_j + {}^s d) = $$
$$ i.A^s{}_{jg} \,.\, (a_h{}^j.X'^h - i.c^j) \circ (a_k{}^g.X'^k - i.c^g) + 2.B^s{}_j \,.\, (a_h{}^j.X'^h - i.c^j) - i.C^s \;; $$

formule où on applique la convention d'EINSTEIN, et où l'ordre dans la composition des dérivations, (opération notée «o»,) est irrelevant parce que a et c ne dépendent pas de x. D'où, en effectuant les produits:

$$\begin{aligned} {}^s\beta_v \,.\, T'^v = {} & i \,.\, A^s{}_{jg} \,.\, a_h{}^j \,.\, a_k{}^g \,.\, X'X'^{hk} \\ & + A^s{}_{jg} \,.\, (a_h{}^j \,.\, c^g + a_h{}^g \,.\, c^j) \,.\, X'^h + 2.B^s{}_j \,.\, a_h{}^j \,.\, X'^h \\ & - ({}^s a_h{}^j \,.\, x_j + {}^s b_h) \,.\, X'^h \\ & + i \,.\, ({}^s c^j \,.\, x_j + {}^s d) \\ & - i \,.\, (A^s{}_{jg} \,.\, c^j \,.\, c^g + 2.B^s{}_j \,.\, c^j + C^s) \;; \end{aligned}$$

les formules de ce type constituent un système où l'on doit reconnaître des équations de la forme :

$$T'^v = i \,.\, A'^v{}_{hk} \,.\, X'X'^{hk} + 2 \,.\, B'^v{}_h \,.\, X'^h - i \,.\, C'^v \;.$$

Dans la voie annoncée plus haut, nous poursuivrons les calculs en demandant seulement que les coefficients $A^s{}_{jg}$ ne dépendent pas des variables $\{x_j, z\}$, et que les $B^s{}_j$ soient linéaires en x_J ; sans spécifier d'isomorphisme entre R_S et $R_J \otimes_{sym} R_J$.

Notons $\vartheta^v{}_s$ la matrice inverse de ${}^s\beta_v$; il vient en multipliant par cette matrice l'expression trouvée ci-avant pour ${}^s\beta_v \,.\, T'^v$:

$$
\begin{aligned}
A'^v{}_{hk} &= \vartheta^v{}_s \,.\, A^s{}_{jg} \,.\, a_h{}^j \,.\, a_k{}^g \quad ; \\
B'^v{}_h &= \vartheta^v{}_s \,.\, B^s{}_j \,.\, a_h{}^j + \vartheta^v{}_s \,.\, A^s{}_{jg} \,.\, a_h{}^j \,.\, c^g \\
&\qquad - (1/2) \,.\, \vartheta^v{}_s \,.\, ({}^s a_h{}^j \,.\, x_j + {}^s b_h) \quad ; \\
C'^v &= \vartheta^v{}_s \,.\, C^s + 2 \,.\, \vartheta^v{}_s \,.\, B^s{}_j \,.\, c^j + \vartheta^v{}_s \,.\, A^s{}_{jg} \,.\, c^j \,.\, c^g \\
&\qquad - \vartheta^v{}_s \,.\, ({}^s c^j \,.\, x_j + {}^s d) \quad ;
\end{aligned}
$$

Le premier groupe d'équations, qui lie les $A'^v{}_{hk}$ aux $A^s{}_{jg}$, montre que $A^S{}_{JJ}$ fournit un isomorphisme invariant entre R_S et $R_J \otimes_{sym} R_J$.

Dans le coefficient $B'^v{}_h$, on voit que, outre $B^s{}_j$, le seul terme dépendant de x_J est ${}^s a_h{}^j \,.\, x_j$: ceci montre que la propriété de linéarité en x_J se conserve dans les changements de variable du type considéré .

Pour obtenir que les $B'^v{}_h$ soient constants sur une plaque déterminée, il suffit de donner aux ${}^s a_h{}^j$ des valeurs qui compensent les termes linéaires en x_J introduits par les $B^s{}_j$. On obtiendra alors que, sur cette même plaque, s'annulent les $B'^v{}_h$, en donnant aux ${}^s b_h$ des valeurs appropriées.

Dans l'expression de C'^v, les termes qui ne sont pas constants sur chaque plaque, sont, outre les termes en C^s, d'une part, les termes en $B^s{}_j$ et, d'autre part, $- \vartheta^v{}_s \,.\, {}^s c^j \,.\, x_j$: il n'y a donc, en dehors de C^s, que des termes linéaires en x_J : de même qu'au §3, afin d'éliminer ces termes, on calcule la différentielle seconde, ΔC^S, de C^S .

Il apparaît que ΔC^S peut, (avec tous les indices de ses composantes ${}^{j,g}\Delta^s$,) être considéré comme un tenseur (plus exactement un champ tensoriel sur l'espace de base des $\{t_S, x_J, z\}$, mais ne dépendant pas de z) une fois contravariant en t_S et deux fois en x_J; c'est-à-dire comme un élément produit tensoriel de $R_S \otimes (R_J \otimes_{sym} R_J)$.

Si (cf. *supra*) on identifie R_S et $R_J \otimes_{sym} R_J$, par $A^s{}_{jg}(t)$, ΔC devient un tenseur, $\Delta C^{S,S}$, deux fois contravariant sur R_S .

De façon précise, ${}^{SJJ}\Delta C^S$ a pour composantes :

$$\{j,g\}C^s = \partial^2 C^s/\partial x_j.\partial x_g \quad ;$$

et pour $\Delta C^{S,S}$ on a de même, avec $u \in S$:

$$\Delta C^{u,s} = A^u{}_{jg}(t) \,.\, \partial^2 C^s/\partial x_j.\partial x_g \quad ;$$

formule où l'on doit sommer indépendamment par rapport aux indices j et g ; avec les formules de transformation:

$${}^s\beta_v \,.\, {}^r\beta_w \,.\, \Delta C'^{w,v} \;=\; \Delta C^{r,s} \quad ;$$

où on a noté {r, w, s, v} des indices de S.

Si chacune des plaques est munie d'un produit scalaire en x_J, cette stucture s'étend au carré tensoriel symétrique, donc à l'espace tangent à l'espace transverse des t_S; lequel devient (en général) une variété de RIEMANN; et il convient de demander que la transformation linéaire a(t) respecte le produit scalaire; notamment, dans la réduction des les $B^s{}_j$, pour les valeurs données aux ${}^s a_h{}^j$.

On peut alors identifier tenseurs covariants et contravariants; en particulier, dans le cas de l'espace de FOURIER-MÖBIUS, introduit au §8 de [REL. CONT. SPAT.], le groupe de FOURIER-POINCARÉ opère transitivement; le tenseur ΔC^S s'identifie à l'application identique.

Pour interpréter, en général, ΔC^S en termes de courbure, on doit généraliser les considérations du §4: c'est l'objet du §6.

6 Connexion associée à une classe de systèmes différentiels S{A, B, C} sur l'espace des (t, x, z), avec x et t multi-dimensionnels

Poursuivant l'étude des systèmes S{A, B, C} du type considéré au §5, on se propose d'associer à un tel système une connexion sur l'espace des (t, x, z); il apparaîtra que le tenseur ΔC^S est compris dans le tenseur de courbure associé à cette connexion.

On reprend ici, pas à pas, les constructions du §4, en les généralisant comme l'impose le cadre multidimensionnel (cardJ > 1). Comme au §4, on postule que si on transporte, suivant un chemin C = (M, N) quelconque, un vecteur (0, 0, Δz) tangent en M à la fibre passant par ce point, on obtient le vecteur de mêmes composantes tangent à la fibre passant par N. De même, puisque les changements de coordonnées admissibles sont linéaires sur chaque plaque, on postule que si on transporte, suivant un chemin C = (M, N) inclus dans une plaque, un vecteur (0, Δx, Δz) tangent en M à cette plaque, on obtient le vecteur de mêmes composantes tangent à la plaque en N.

Puisque le système S{A, B, C} établit en chaque point M de l'espace des {t, x, z} un isomorphisme entre l'espace tangent tout entier et le carré tensoriel symétrique de l'espace tangent à la plaque, on demande que cet isomorphisme soit respecté par la connexion. Sous cette condition, le transport, suivant C = (M, N), de l'espace tangent PM à la plaque en M sur l'espace tangent PN à la plaque en N, détermine le transport du carré tensoriel symétrique de PM sur celui de PN; et donc, *ipso facto*, celui de l'espace tangent TM sur TN.

Reste donc le transport de PM sur PN et ses propriétés: en d'autres termes, au lieu d'une connexion sur le fibré tangent à l'espace des {t, x, z}, on considère une connexion sur le sous-fibré des espaces tangents aux plaques, au-dessus du même espace de base.

Il s'agit de définir le transport, à partir d'un point M, suivant un élément d'arc {Δt, Δx, Δz}; comme à un élément d'arc {0, Δx, Δz} est associé un simple transport parallèle dans la plaque, le problème peut se résoudre en définissant un transport d'une plaque Pl(t) sur une plaque infiniment voisine, Pl(t+Δt). Ce transport ne sera pas globalement linéaire (comme le serait un isomorphisme de structure affine) mais aura, en tout point M de Pl(t), une différentielle définissant le transport parallèle vers un point N de Pl(t+Δt).

Au §4, un transport de Pl(t) vers Pl(t+Δt), a été défini par un faisceau de lignes de flux transverses au plaques: ici, l'espace des t étant multi–dimmensionnel, il faut un faisceau de courbes pour chaque direction de cet espace; ou, ce qui est équivalent, pour chaque vecteur Δt. Comme au §4, le faisceau ne sera pas déterminé de manière unique; mais de telle sorte que la différentielle, qui seule importe, soit la même quel que soit le faisceau choisi.

Reprenons l'équation:

$$T^s - (2.B^s{}_j \,.\, X^j + C^s.\, Z) \approx i\, A^s{}_{jj'} \,.\, XX^{jj'} \quad ;$$

où l'équivalence exprime la condition que les deux membres ont même effet sur une fonction f satisfaisant au système considéré. Pour le transport dans la direction t_s, plus précisément de Pl(t) vers Pl(t+Δt), Δt ayant toutes ses composantes nulles exceptée Δt_s, on peut utiliser le champ défini par le membre de gauche.

Comme on l'a annoncé, ce champ n'est pas défini de manière unique par Δt: mais il possède les propriétés remarquables d'être un champs de dérivation d'ordre 1 (ou champs de vecteur) transverse à Pl(M), ayant Δt_s pour composante transverse à la plaque, et équivalent sur Pl(M) à un champ d'ordre 2 à coefficients constants. Ces propriétés déterminent le champ, à ceci près qu'on peut, dans le membre de droite, remplacer les X^j par $X^j + q^j.Z$, les q^j étant des coefficients constants arbitraires.

Or à un tel changement dans le membre de droite, correspond seulement, dans le membre de gauche, l'addition d'un terme constant tangent à la plaque; car on a, en bref:

$$i.(X^j + q^j.Z).(X^{j'} + q^{j'}.Z) = i.XX^{jj'} + q^j.X^{j'} + q^{j'}.X^j + q^j.q^{j'}.Z\ ;$$

d'où il résulte que le champ de transport de Pl(t) vers Pl(t+Δt) est déterminé à un vecteur constant près.

Quant au transport des vecteurs tangents à la plaque, il est déterminé par la différentielle (sur la plaque) du champ de transport; comme les coefficients $B^s{}_j$ dépendent linéairement de x, la différentielle ne varie sur Pl(t) que par le terme provenant de $C^s.Z$. De ceci nous tirerons, quant à la connexion, des conclusions qui généralisent celles du §4.

Si l'on considère le quotient des plaques par l'axe des z (i.e., qu'on identifie deux vecteurs de la plaque ne différant que par un vecteur porté par la fibre) le transport de M en N dépend seulement du trajet C(M, N) dans l'espace des t: si la courbe C a pour équation paramétrique: M(u) = (t(u),x(u),z(u)), avec M(0) = M et M(1) = N, les fonctions x(u) et z(u) ne comptent pas dans le transport de M vers N; ou, en termes plus généraux, dans le transport de Pl(t(0)) vers Pl(t(1)).

Dans le cas particulier du §4, cette connexion est triviale, l'espace des t étant réduit à une droite affine, avec pour seules transformations admissibles des transformations linéaires; et le transport parallèle suivant tout chemin C(M, N) respecte la composante Δx d'un vecteur.

Si l'on prend en compte la composante dans la direction Z, des vecteurs transportés, la fonction x(u) (de l'équation paramétrique du chemin) intervient explicitement; et on montre, comme au §4, que pour le transport d'un vecteur (0, Δu, Δw) sur le circuit:

$$(0, 0, 0) \ldots (\Delta t, 0, 0) \ldots (\Delta t, \Delta x, 0) \ldots (0, \Delta x, 0) \ldots (0, 0, 0) \;,$$

on aura la suite de vecteurs transportés:

$$(0,\ \Delta u, \Delta w) \ldots (0, \Delta u, \Delta w\text{-}\partial C\Delta u\Delta t) \ldots \textit{idem}$$

$$\ldots (0, \Delta u, \Delta w\ \text{-}\partial C\Delta u\Delta t + (\partial C\text{+}\partial\partial C\Delta x)\Delta u\Delta t) \ldots \textit{idem}\;;$$

soit, au total, pour effet de courbure:

$$(0, \Delta u, \Delta w) \ldots (0, \Delta u, \Delta w\text{+}\partial\partial C\Delta x\Delta t\Delta u)\;;$$

il faut seulement prendre garde qu'ici le terme noté $\partial\partial C\Delta x\Delta t\Delta u$ est la somme tensorielle:

$$(\partial^2 C^s/\partial x_j.\partial x_g)\ \Delta t_s.\Delta x_j.\Delta u_g \quad .$$

Ainsi, la différentielle seconde de C^S, ΔC^S, s'interprète comme donnant la courbure sur un circuit infinitésimal en Δt, Δx. Mais, à la différence de ce qui était au §4, il existe ici, dans le cas général d'autres composantes de la courbure: pour les circuits en Δt, Δt (croisant deux directions transverses distinctes). Ceci correspond à la connexion non triviale montrée ci-dessus sur la variété des *t*.

Pour calculer la courbure en $[\Delta t_s, \Delta t_{s'}]$, on doit prendre la différentielle, sur la plaque, du crochet des deux champs de vecteurs:

$$(T^s - 2.B^s{}_j.X^j - C^s.Z) \quad \text{et :} \quad (T^{s'} - 2.B^{s'}{}_j.X^j - C^{s'}.Z) \quad ;$$

(crochet qui est bien un champs tangent à la plaque). En effet, le crochet donne le transport affin de Pl(M) sur Pl(M) suivant un circuit infinitésimal $[\Delta t_s, \Delta t_{s'}]$; et l'on a, en différenciant ce champs obtenu, par crochet, le transport d'un vecteur tangent.

Pour calculer ce crochet, on reprend la convention, posée au §5, de noter une dérivation par un indice supérieur placé à gauche de la fonction qu'on dérive. Le crochet des deux champs, chacun somme de trois termes, comprend neuf termes, que nous considérons successivement.

$$[T^s, T^{s'}] = 0 \quad ; \quad [C^s.Z, C^{s'}.Z] = 0 \quad ;$$

$$[T^s, B^{s'}{}_j.X^j] = {}^sB^{s'}{}_j.X^j \quad ; \quad [T^{s'}, B^s{}_j.X^j] = {}^{s'}B^s{}_j.X^j \quad ;$$

$$[T^s, C^{s'}.Z] = {}^sC^{s'}.Z \quad ; \quad [T^{s'}, C^s.Z] = {}^{s'}C^s.Z \quad ;$$

$$[B^s{}_j.X^j\,,\,B^{s'}{}_j.X^j\,] \;=\; B^s{}_{j'}\,.\,{}^{j'}B^{s'}{}_j.X^j \;-\; B^{s'}{}_{j'}\,.\,{}^{j'}B^s{}_j.\,X^j \qquad ;$$

$$[B^s{}_j.X^j\,,\,C^{s'}.Z] = B^s{}_j\,.\,{}^jC^{s'}.Z \quad ; \quad [B^{s'}{}_j.X^j\,,\,C^s.Z] = B^{s'}{}_j\,.\,{}^jC^s.Z \;;$$

Il apparaît d'abord que le crochet, n'ayant pas de termes en T non nuls, est tangent à la plaque; et, en groupant les termes non nuls, on a:

$$2.({}^{s'}B^s{}_j - {}^sB^{s'}{}_j).X^j \quad ; \quad 4.(B^s{}_{j'}.\,{}^{j'}B^{s'}{}_j \;-\; B^{s'}{}_{j'}\,.\,{}^{j'}B^s{}_j).X^j \qquad ;$$

$$({}^{s'}C^s - {}^sC^{s'}).Z \qquad ; \quad 2.(B^s{}_j\,.\,{}^jC^{s'} \;-\; B^{s'}{}_j\,.\,{}^jC^s).Z \qquad ;$$

ce qui permet d'écrire le crochet des champs:

$$[(T^s - 2.B^s{}_j.X^j - C^s.Z)\,,\,(T^{s'} - 2.B^{s'}{}_j.X^j - C^{s'}.Z)] = \Omega^{ss'}{}_j.X^j \;+ K^{ss'}.Z \;;$$

avec pour les composantes Ω et K:

$$\Omega^{ss'}{}_j \;=\; 2.({}^{s'}B^s{}_j - {}^sB^{s'}{}_j) \;+\; 4.(B^s{}_{j'}.\,{}^{j'}B^{s'}{}_j \;-\; B^{s'}{}_{j'}\,.\,{}^{j'}B^s{}_j) \qquad ;$$

$$K^{ss'} \;=\; ({}^{s'}C^s - {}^sC^{s'}) \;+\; 2.(B^s{}_j\,.\,{}^jC^{s'} \;-\; B^{s'}{}_j\,.\,{}^jC^s) \qquad ;$$

où il apparaît que, sur la plaque, les coefficients $\Omega^{ss'}{}_j$ dépendent linéairement de x.

Pour un vecteur (0, Δu, Δw), transporté sur un circuit infinitésimal [Δt_s, $\Delta t_{s'}$], la variation sera donc:

$$(0,\,\Delta u_g\,.\,{}^g\Omega^{ss'}{}_j\;,\,\Delta u_g\,.\,{}^gK^{ss'}) \;;$$

puisque les Ω sont linéaires en x, les coefficients ${}^g\Omega^{ss'}{}_j$ sont, comme on l'avait annoncé, indépendants du point de départ du circuit sur la plaque; dont dépend seulement le dernier terme, celui dans la direction de la fibre.

7 Une condition d'existence de solutions globales pour les systèmes différentiels S{A, B, C}

Les calculs de crochets d'opérateurs de dérivation, effectués au §6 pour étudier la connexion définie sur l'espace des (t, x, z), suggèrent un problème complémentaire, qui est sans objet dans [REL. CONT. SPAT.]: le problème de l'existence de solutions pour les système différentiels introduits au §5.

Dans [REL. CONT. SPAT.], en effet, une fonction *f*, solution globale, i.e., définie sur tout l'espace des (t, x, z) est, en bref, l'ensemble des transformées, par le groupe de FOURIER-POINCARÉ, d'une fonction donnée, initialement, sur la plaque t=0, (ou sur toute autre plaque).

Dans le cas, plus général, d'un système S{A, B, C}, on partira d'une fonction f, donnée sur la plaque t=0, et satisfaisant à la condition complémentaire Z = -i , (i.e. $\partial_z.f = -i.f$), et on prolongera cette fonction à toute plaque, suivant un chemin en t, en respectant les équations:

$$T^s = i.A^s_{jj'}(t).XX^{jj'} + 2.B^s_j(t,x).X^j - i.C^s(t,x) \quad ;$$

(où l'on a imposé les restrictions: A indépendant de x; B linéaire en x; avec, pour rejoindre [REL. CONT. SPAT.], la condition complémentaire que $B^s_j.X^j$ définit, pour tout t donné, une transformation infinitésimale orthogonale des variables x_j).

Ceci revient à dire qu'on se place dans le produit de la variété des t_S par l'espace des fonctions de carré sommable sur la plaque type (espace des x, z), et qu'on cherche dans cette espace une section, au-dessus de la variété des t toute entière, passant par le point (fonction) donné pour t = 0.

À la différence près que cette section prend ses valeurs dans un espace fonctionnel, le problème ne différe pas de celui de la recherche d'une fonction y de t d'après ses dérivées partielles:

$$\partial f(t_S) / \partial t_s = a^s(t_S).f(t_S) \quad ;$$

où la condition est l'annulation des crochets. C'est par analogie avec ce cas que nous énoncerons la condition cherchée.

De façon précise, notons R_U l'espace où prend ses valeurs la fonction f; les indices de coordonnées étant notés u, v, u', v'; une cordonnée, y_u ; et la dérivée partielle par rapport à y_u, Y^u. On écrit explicitement les composantes des opérateurs linéaires $a^s(tS)$:

$$a^s(t_S).y = a^s(t_S)_U{}^U.y_U = y'_U \quad ;$$

$$y'_v = \Sigma\{a^s(t_S)_v{}^u.y_u \mid u \in U\} = a^s(t)_v{}^u.y_u \quad ;$$

où la dernière formule repose sur la sommation par rapport aux indices répétés.

La condition d'existence de la fonction $f_U(t_S)$ n'est autre que l'annulation des crochets des champs de vecteurs H^s, pris deux à deux:

$$H^s(t,y) = T^s + a^s(t)_v{}^u.y_u.Y^v \quad ;$$

(champs sur l'espace des (t, y) ; espace de dimension cardS + card U). On a :

$$[H^s(t, y), H^r(t, y)] = ({}^s a^r(t)_v{}^u \cdot y_u - {}^r a^s(t)_v{}^u \cdot y_u) \cdot Y^v +$$
$$(a^r(t)_v{}^{v'} \cdot a^s(t)_{v'}{}^u \cdot y_u - a^s(t)_v{}^{v'} \cdot a^r(t)_{v'}{}^u \cdot y_u) \cdot Y^v \quad ;$$

où, comme précédemment, la dérivée d'un terme par rapport à t_s est notée par un indice supérieur s précédant ce terme: ${}^s a = \partial a / \partial t_s$.

Il apparaît que les crochets sont des champs dans la dirextion des y (sans composantes en T^S); et la condition d'annulation de tous les crochets peut s'écrire sous une forme qui se généralise immédiatement au cas fonctionnel:

$$\forall\, r, s : \ [\, a^r(t) \,, a^s(t)] + {}^s a^r(t) - {}^r a^s(t) = 0 \ ;$$

où chacune des équations exprime la nullité d'un endomorphisme linéaire de l'espace des y ; (le premier terme étant un commutateur d'opérateurs linéaires).

Revenons maintenant au cas fonctionnel. À la place des endomorphismes as(t), on considère les opérateurs différentiels $Da^s(t)$, définis par:

$$Da^s(t) = i \,. A^s{}_{jj'}(t) \,. XX^{jj'} + 2.B^s{}_j(t, x) \,. X^j - i.C^s(t,x) \quad ;$$

et l'on a le système de conditions:

$$\forall\, r, s : \ [\, Da^r(t) \,, Da^s(t)] + {}^s Da^r(t) - {}^r Da^s(t) = 0 \ ;$$

où figurent des crochets usuels d'opérateurs différentiels, et des opérateurs ayant pour coefficients les dérivées des A, B, C par rapport à t.

Il vaut la peine d'examiner ces conditions. Les termes ${}^s Da^r(t)$ ont la même forme que les $Da^r(t)$, les coefficients étant seulement calculés par dérivation.

Le crochet des opérateurs différentiels est plus remarquable. Nous dirons, en bref, qu'il comprend des termes en [A, A], [B,B], [C,C], [A,B], [A,C], [B,C]. Les termes en [A, A] sont nuls:

$$[A, A] = [A^r{}_{jj'}(t) \,. XX^{jj'} \ , \ A^s{}_{jj'}(t) \,. XX^{jj'}] = 0 \ ;$$

et, *a fortiori*, les termes [C,C] qui ne sont que des commutateurs de multiplications par une fonction C, sans calcul de dérivée partielle.

Compte tenu de la linéarité des B en x, les termes [B,B]:

$$[B^r{}_j(t, x) \,. X^j \ , \ B^s{}_j(t, x) \,. X^j] \ ;$$

sont de la même forme que les termes en B; (et, plus précisément, si les B sont des transformations infinitésimales orthogonales, les [B,B] en sont également).

On vérifiera que les termes [A, B] sont de la forme A; et les [B, C], de la forme C. Restent les [A, C]. Compte tenu de la symétrie en j, j', on a:

$$[A^r{}_{jj'}(t) \,.\, XX^{jj'} \;,\; C^s(t,x)\,] = 2 \,.\, A^r{}_{jj'}(t) \,.\, {}^{j'}C^s(t,x) \,.\, X^j \quad ;$$

ici, on n'aura un terme en B (i.e. linéaire en x) que si les C(t,x) sont de degré 2 en x; ce qui rappelle le cas du groupe de FOURIER; mais n'est pas, *a priori*, indispensable pour que les conditions de crochets nuls soient satisfaites.

8 Remarque: la condition B = 0 dans le cas multidimensionnel

On a annoncé ci-dessus, au §5, que, dans le cas multidimensionnel, la condition A = constante, avec B = 0, quel que soit t, est particulièrement restrictive. De façon précise, si l'on a B = 0, pour que B' = 0, il est nécessaire que ni les a(t) ni les c(t) ne dépendent effectivement de t.

Reprenons l'équation:

$$\begin{aligned} B'^v{}_h \;=\; & \vartheta^v{}_s \,.\, B^s{}_j \,.\, a_h{}^j + \vartheta^v{}_s \,.\, A^s{}_{jg} \,.\, a_h{}^j \,.\, c^g \\ & - (1/2) \,.\, \vartheta^v{}_s \,.\, (\,{}^s a_h{}^j \,.\, x_j + {}^s b_h\,) \quad ; \end{aligned}$$

si on pose: B=0 et B'=0, ${}^s a_h{}^j \,.\, x_j$ est, dans les équations, le seul terme dépendant effectivement de x_J: on doit donc d'abord imposer: ${}^s a_h{}^j = 0$; i.e., $a_J{}^J$ ne dépend pas de t; restent les équations:

$$\forall\; h, s \;:\; 0 = A^s{}_{jg} \,.\, a_h{}^j \,.\, c^g - (1/2) \,.\, {}^s b_h \quad ;$$

si R_S est identifié à $R_J \otimes_{sym} R_J$ et que A est l'identité, on peut encore écrire:

$$\forall\, h, \forall\, s = \{j,g\} \;:\; 0 = a_h{}^j \,.\, c^g + a_h{}^g \,.\, c^j - {}^s b_h \quad ;$$

c'est ce qui impose que le champ $c^J(t)$ ne dépende pas de t .

Nous réduirons d'abord la démonstration générale de ce fait au cas particulier où l'application $a_J{}^J$, laquelle doit ne pas dépendre de t, coïncide avec l'identité. Notons, en effet, $v_J{}^J$ l'application inverse de $a_J{}^J$; on a, en multipliant chaque équation par $v_{j'}{}^h$, et sommant par rapport à h:

$$\forall\, j', \forall\, s = \{j,g\} \;:\; 0 = \delta_{j'}{}^j \,.\, c^g + \delta_{j'}{}^g \,.\, c^j - {}^s p_{j'} \quad ;$$

formule où $\delta_{j'}^{J}$ désigne, comme il est d'usage, une composante du tenseur diagonal de KRONECKER, et ${}^{s}p_{j'}$ est la somme, par rapport à h, des ${}^{s}b_{h} . v_{j'}^{h}$.

Reste à considérer le système sous la forme particulière suivante :

$$\forall j' , \forall s =\{j,g\} \ : \quad \delta_{j'}^{j} . c^{g} + \delta_{j'}^{g} . c^{j} \ = \ {}^{s}b_{j'} \quad .$$

Ici, il nous paraît commode de désigner les éléments {j, j', g,...} de J par des chiffres {1, 2, 3,...}. On a, notamment, les relations:

$$2.c^{1} = {}^{\{1,1\}}b_{1} \ ; \ \ c^{2} = {}^{\{1,2\}}b_{1} \ ; \ \ 0 \ = {}^{\{2,2\}}b_{1} \ ; \ [\ 0 = {}^{\{2,3\}}b_{1}\ ] \ ;$$

$$0 \ = {}^{\{1,1\}}b_{2} \ ; \ \ c^{1} = {}^{\{1,2\}}b_{2} \ ; \ \ 2.c^{2} = {}^{\{2,2\}}b_{2} \ ;$$

(la relation mise entre crochets n'étant à introduire que si cardJ ≥ 3).

Pour établir, en toute généralité, que (si cardJ ≥ 2,) le champ $c^{J}(t)$ ne dépend pas de t, il suffit d'établir les égalités suivantes, qui expriment la nullité de dérivées ${}^{s}c^{j}$ particulières :

$$0 = {}^{\{1,1\}}c^{1} \ ; \ \ 0 = {}^{\{1,2\}}c^{1} \ ; \ \ 0 \ = {}^{\{2,2\}}c^{1} \ ; \ [\ 0 = {}^{\{2,3\}}c^{1}\ ] \ ;$$

la première égalité résulte de ce que c^{1} est une dérivée partielle de b_{2}, dont la dérivée partielle ${}^{\{1,1\}}b_{2}$ est elle-même nulle; la troisième égalité résulte [comme la quatrième,] de ce que c^{1} est dérivée partielle de b_{1}, qui déjà y satisfait. Enfin on a:

$$2.{}^{\{1,2\}}c^{1} \ = {}^{\{1,2\}\{1,1\}}b_{1} \ = {}^{\{1,1\}\{1,2\}}b_{1} \ = {}^{\{1,1\}}c^{2} = (1/2)\ {}^{\{1,1\}\{2,2\}}b_{2} \ ;$$

où la nullité du dernier membre résulte immédiatement de celle de ${}^{\{1,1\}}b_{2}$.

Revenons maintenant à l'équation (où s = {j,g}):

$${}^{s}\beta_{v} . C'^{v} \ = \ C^{s} + c^{j}. c^{g} \ - \ ({}^{s}c^{j'}.x_{j'} \ + \ {}^{s}d) \ ;$$

le coefficient ${}^{s}c^{j}$ du terme en x_{j} est nul (si B = 0, dans le cas général cardJ ≥2). Dans le cas particulier où a_{h}^{j} est le tenseur diagonal de KRONECKER, δ_{h}^{j}, on voit donc que C^{s} est défini à un terme additif près ne dépendant que de t :

$$C'^{s} \ = \ C^{s} + c^{j}. c^{g} \ - \ {}^{s}d \quad ;$$

plus précisément, ce terme est la différentielle d'une fonction de t.

Il suffit donc, pour trouver un invariant, de calculer la différentielle première en x, DC^S, de C^S . De même que ΔC^S, DC^S peut, (avec tous ses indices,) être considéré comme un tenseur (plus exactement un champs tensoriel sur l'espace de base des $\{t_S, x_J, z\}$, mais ne dépendant pas de z); ce champs est une fois contravariant en t, et une fois en x ; c'est-à-dire comme un élément du produit tensoriel de $R_S \otimes R_J$; avec les formules de transformation:

$$ {}^s\beta_v \,.\, {}^j a_h \,.\, {}^h C'^v \;=\; {}^j C^s \quad ; $$

où on a noté {s, v} des paires non ordonnées d'indices; les sommes sont faites sur l'ensemble des paires v et des indices h; et, comme partout, un indice haut, avant C ou C' indique une dérivation: e.g.: ${}^j C^s = \partial C^s / \partial x_j$.

9 Espaces d'ondes quadratiques auxquels sont associés des systèmes différentiels S{A, B, C}

Dans [REL. CONT. SPAT.], toute fonction données sur R^n est étendue en une fonction définie sur l'espace de FOURIER-MÖBIUS, FM(n). En bref, la valeur d'une fonction f en un point de FM(n) se calcule comme l'intégrale du produit de f par une onde quadratique, ou exponentielle d'un polynôme du second degré affecté du coefficient i. On se propose ici, partant d'un espace d'ondes quadratiques dont la forme est, *a priori*, plus générale que celle de FM(n), de construire une classe de fonctions f(t, x, z) satisfaisant à un système S{A, B, C}.

9.1 Modèle général: relation entre les termes des ondes quadratiques et les coefficients du système S

Comme précédemment, la coordonnée z est une phase (que nous ne mentionnerons pas, en général); et les x, t sont des variables vectorielles, dont les composantes sont désignées par des indices: x est dans R_J; et t est dans un espace, noté R_S, qui, par sa dimension, peut être identifié avec le carré tensoriel symétrique de R_J. De plus, on introduit une variable duale v^J , qui prend sa valeur dans R^J.

Afin de présenter nos constructions sur des formules simples, nous omettons d'abord tout indice; ce qui correspond au cas où n=1. On pose:

$$ f(t, x) = \int \exp(N(t) - i.D(t).v^2 + i.E(t).x.v - i.F(t, x)) \,.\, \sim\! f(v) \,.\, dv \;\; ; $$

dans la suite, l'onde quadratique $\exp(N(t) - i.D(t).v^2 + i.E(t).v.x - i.F(t, x))$, sera simplement notée Exp (ou Exp(t, x; v); et on écrira $f(v)$ au lieu de $\sim f(v)$. L'analogie avec [REL. CONT. SPAT.] dispense de commenter longuement la formule intégrale: nous signalons seulement que le terme réel N(t) introduit un facteur de normalisation.

À partir de cette formule, on calcule comme des intégrales les dérivées premières et secondes, T, X, XX ; il vient:

$$\mathrm{T}f(t,x) = \int \mathrm{Exp}\,.\,(N' - i.D'.v^2 + i.E'.x.v - i.F'_t)\;.\;f(v).dv \quad ;$$

$$\mathrm{X}f(t,x) = \int \mathrm{Exp}\,.\,(i.E.v \;-\; i.F'_x)\;.\;f(v).dv \quad ;$$

$$\mathrm{XX}f(t,x) = \int \mathrm{Exp}\,.\,(-(E.v - F'_x)^2 \;-\; i.F''_{xx})\;.\;f(v).dv \quad .$$

Afin de trouver un système S{A, B, C} satisfait par f, on calcule sous la forme d'une intégrale l'expression (i.A.XX + 2.B.X -i.C) f, qu'on identifie à Tf ; il vient:

(00) º 0 en v, partie réelle : $N' = A.F''_{xx}$;

(0) º 0 en v, partie imaginaire : $F'_t = A.(F'_x)^2 + 2.B.F'_x + C$;

(1) º 1 en v, partie imaginaire : $x.E' = 2.A.E.F'_x + 2.B.E$;

(2) º 2 en v, partie imaginaire : $D' = A.(E)^2$;

On retrouve, notamment, sur ces formules le cas de FM(1), sous la forme donnée dans [REL. CONT. SPAT.], en posant:

$N = (-1/2).\log(\cos 2t)$;

$D = (1/2).\mathrm{tg}2t$; $E = 1/\cos 2t$; $F = (1/2).x^2.\mathrm{tg}2t$;

$A = 1$; $B = 0$; $C = x^2$.

Le système reliant {A, B, C ; N ; D, E, F} impose des conditions générales simples; que nous énoncerons d'abord d'après les formules sans indices; le sens exact en étant donné ensuite, dans les formules tensorielles. D'abord, puisque A est inversible (car le système S doit, en bref, identifier les dérivées secondes en x aux dérivées premières en t), F''_{xx}, comme N' et A, ne doit dépendre que de t, et non de x: ce qui signifie que F(t, x) est un polynôme de degré 2 en x, dont les coefficients sont fonction de t.

De même, si le terme $D(t).v^2$ représente un terme quadratique générique, D' est inversible, comme A ; et de l'équation: $D' = A.(E)^2$, on déduit que E est inversible. Cela étant admis, l'équation: $x.E' = 2.A.E.F'_x + 2.B.E$, montre que B doit être linéaire en x, comme le sont les deux autres termes figurant dans cette équation. Et, finalement, on voit que C doit, comme F, être une forme quadratique en x, à coefficients fonction de t.

On utilisera donc, désormais, pour F(t, x), B(t, x) et C(t, x), les expressions polynomiales explicites:

$$F(t, x) = F0(t) + 2F1(t).x + F2(t).x.x \quad ;$$

$$B(t, x) = B0(t) + B1(t).x \quad ;$$

$$C(t, x) = C0(t) + 2C1(t).x + C2(t).x.x \quad .$$

Voici maintenant des formules tensorielles, semblables à celles des §§ précédents (avec les indices de dérivation précédant la fonction, etc.), où l'on suit la convention d'EINSTEIN de sommation par rapport aux indices répétés:

$$(00) \quad {}^sN' = A^s{}_{jj'} \, . \, {}^{jj'}F'' \quad ;$$

$$(0) \quad {}^sF = A^s{}_{jj'} \, . \, {}^jF' \, . \, {}^{j'}F' \; + \; 2 \, . \, B^s{}_j \, . \, {}^jF' \; + \; C^s \quad ;$$

$$(1) \quad {}^sE'{}_j{}^{j'} \, . \, x_{j'} = 2 \, . \, A^s{}_{j'j''} \, . \, E_j{}^{j'} \, . \, {}^{j''}F' \; + \; 2 \, . B^s{}_{j'} \, . \, E_j{}^{j'} \quad ;$$

$$(2) \quad {}^sD'{}_{jj'} = A^s{}_{j''j'''} \, . \, E_j{}^{j''} \, . \, E_{j'}{}^{j'''} \quad ;$$

On remarque que, dans ce système, la 1-ère et la 4-ème équations lient les cinq fonctions de t : {N, A, F, D, E}; à partir de ces fonctions, la 3-ème équation permet de calculer B (linéaire en x) sans imposer de condition complémentaire; et la 2-ème équation donne alors C (quadratique en x).

$${}^{jj'}F'' = 2. \, F2(t)^{jj'} \quad ; \quad {}^jF' = 2.F1(t)^j + 2.F2(t)^{jj'}.x_{j'} \, ;$$

$$B^s{}_j = {}^sB0_j + {}^sB1(t)_j{}^k.x_k \; .$$

9.2 Détermination du système S pour l'espace de FOURIER–MÖBIUS : calcul du coefficient A

Afin d'interpréter les formules tensorielles prenons l'exemple de l'espace FM(n), tel qu'il est donné dans [REL. CONT. SPAT.], mais avec les notations du présent §. Nous supposons R_J identifié avec son dual, par un structure euclidienne, ce qui permet d'élever ou abaisser librement les indices; de plus, un vecteur t_S , transverse aux plaques, est considéré comme un tenseur symétrique t_{JJ} : il définit donc un endomorphisme, $t_J{}^J$ de R_J.

Laissant de côté le facteur de normalisation $(2\pi)^{-n/2}$, on pose:

$$N(t) = (-1/2) . \log(\det (\cos 2t)) \quad ; \quad D(t) = (1/2) . \mathrm{tg}2t \quad ;$$

$$E(t) = 1 / \cos 2t \quad ; \quad F(t, x) = (1/2) .(\mathrm{tg}2t_J{}^J) . x^J . x_J \quad ;$$

Dans le cas n=1, $D'=E^2$; et A=1. Mais, pour n >1, (cf. [REL. CONT. SPAT.], §7), il faut considérer que ${}^SD'_{JJ}$ ne se calcule pas immédiatement en dérivant la série entière, en *t*, qui définit D(t); et on ne peut écrire $D'=E^2$.

Afin de calculer A, notons que c'est un tenseur à trois indices, {s,j,j'}; ou encore, puisque t_S est assimilé à un tenseur symétrique, un tenseur à quatre indices {{j",j'"},{j,j'}}, symétrique en chacune des deux paires; ainsi, A définit une application linéaire qui à un tenseur $ß_S \approx ß_{JJ}$, fait correspondre un tenseur de même forme, ß.A.

En considérant ß et ß.A comme des endomorphismes linéaires, on est conduit à faire l'hypothèse que ß.A est, tout simplement le composé de ß avec un autre endomorphisme qui réalise A (par simple composition). L'expression de ß.A n'est pas si simple; mais on peut la réduire à des compositions d'applications, à condition d'introduire une notation pour la différentielle d'une fonction entière de matrice.

Soit une série entière à coefficients scalaires (réels ou complexes) $W(t) = \Sigma\{ w(p)\ t^p \mid p = 0, 1, 2, \ldots\}$; on a pour la série dérivée: $W'(t) = \Sigma\{(p+1).w(p+1).t^p \mid p = 0, 1, 2, \ldots\}$. Dans le cas général où t n'est pas un scalaire, mais un endomorphisme d'espace vectoriel, on a pour la variation de W(t), l'équation suivante, où ß désigne un accroissement quelconque Δt de t:

$$W(t+ß) = W(t) + \Sigma\ \{w(p+1).\Sigma\{t^q.ß.t^{p-q} \mid q=0, 1,\ldots, p\} \mid p=0, 1, 2, \ldots\ \} ;$$

formule où la somme intérieure, qui définit le terme général de rang p, est une somme de produits de matrices.

La série Σ ci-dessus, qui exprime ce qu'on peut appeler une différentielle non commutative, sera notée: W'(t ; ß); et, en général, pour toute série entière:

$$H(t) \quad = \Sigma\ \{h(p).t^p \mid p = 0, 1, 2,\ldots\} \ ,$$

on notera :

$$H(t\,;\,ß) = \Sigma\,\{(1/(p+1).h(p).\Sigma\{t^q.ß.t^{p-q} \mid q = 0, 1,\ldots, p\} \mid p = 0, 1, 2, \ldots\,\}\;;$$

si t et ß sont symmétriques, il en est de même de H(t ; ß); et, si t commute avec ß, notamment dans le cas n=1, où t est un scalaire, H(t ; ß) = H(t).ß.

Afin d'éviter toute ambiguïté, on donnera une formule explicite pour $ß_S.{}^SD'_{JJ}$; en tenant compte de ce qu'un tenseur symétrique, $ß_S$, peut être identifié à un endomorphisme Δt de R_J ; et donc composé à volonté avec t et avec toute puissance de t.

La dérivée usuelle, D', de la série D(t) = (1/2).tg2t = $\Sigma\{d(p).t^p\}$, n'est autre que la série de $1/(\cos 2t)^2$; on a donc:

$$ß_s\,.\,{}^sD'_{JJ} \approx$$

$$D'(t\,;\,ß) = \Sigma\,\{d(p+1).\Sigma\{t^q.ß.t^{p-q} \mid q=0, 1,\ldots, p\} \mid p=0, 1, 2,\ldots\,\}\;;$$

A est alors caractérisé par l'équation (2) qui prend la forme suivante:

$$ß_s\,.\,{}^sD'_{jj'} \;=\; ß_s\,.\,A^s{}_{hk}\,.\,E_j{}^h\,.\,E_{j'}{}^k \qquad ;$$

ou, en élevant et abaissant des indices et tenant compte de ce que E est symétrique:

$$D'(t\,;\,ß)_j{}^{j'} \;=\; ß_s\,.\,A^s{}_h{}^k.\,E_j{}^h\,.\,E_k{}^{j'} \qquad ;$$

à droite, les deux facteurs E agissent chacuns sur l'un des indices de ß.A; on peut les faire disparaître en multipliant deux fois le membre de droite par (1/E) = cos2t; d'où la formule:

$$(\cos 2t)_h{}^j\,.\,D'(t\,;\,ß)_j{}^{j'}\,.\,(\cos 2t)_{j'}{}^k. \;=\; ß_s\,.\,A^s{}_h{}^k \;\;;$$

Si t et ß commutent, le membre de droite se réduit à ß. Dans le cas particulier de la dimension n=1, on a simplement ß=ß.A; A est l'identité. Il en est de même, quel que soit n, au point t = 0: c'est la forme réduite donnée dans [REL. CONT. SPAT.], §8.

Il convient maintenant de vérifier l'équation (00) : N' = A.F" . On a:

$$N(t) = (-1/2)\,.\,\log(\det(\cos 2t)) \quad ;$$

et, en bref, ß.N' ≈ N(t+ß) - N(t) . Dans [REL. CONT. SPAT.], est rappelée la formule générale:

$$\det(K+k) \approx \det(K)\,(1 + \mathrm{trace}(K^{-1}.k)) \qquad ;\ \text{d'où :}$$

$$\log(\det(K+k)) \approx \log(\det(K)) + \mathrm{trace}(K^{-1}.k) \qquad ; \text{ en posant ici :}$$

$$K = \cos 2t \; ; \; K+k = \cos 2(t+\beta) \; ; \; k = -\, W'(t\,;\,\beta) \; ;$$

où $W = \cos 2t$; donc $W' = -2\sin 2t$; d'où:

$$\beta_s.{}^sN' = (-1/2)\, \mathrm{trace}((\cos 2t)^{-1}.W'(t;\beta)) \; ;$$

expression dont le développement en série a pour premier terme : 2.trace(t.ß).

De façon précise, on a la trace de la somme d'une série de termes dont chacun est de la forme $t^r.\beta.t^s$; cette trace n'est autre que la somme des traces des termes de la série; puisque l'on ne modifie pas la trace d'un produit en permutant circulairement les facteurs, on peut réduire chaque terme à la forme $t^{r+s}.\beta$; donc:

$$\beta_s.{}^sN' = (-1/2)\, \mathrm{trace}(\cos 2t^{-1}.(-2\sin 2t).\beta) = \mathrm{trace}(\mathrm{tg}2t.\beta).$$

On calcule suivant le même principe:

$$\beta_s.A^s{}_{jj'}.{}^{jj'}F'' = \mathrm{trace}(\cos 2t.D'(t;\beta).\cos 2t.\mathrm{tg}2t)$$

$$= \mathrm{trace}(\cos 2t.(1/(\cos 2t)^2).\beta.\cos 2t.\mathrm{tg}2t) = \mathrm{trace}(\mathrm{tg}2t.\beta) \; ;$$

l'équation N'=A.F'' est ainsi vérifiée.

9.3 Calcul explicite des coefficients B et C du système S

L'équation (1), du système des {A, B, C, D, E, F}, rappelée ci-après, sert à calculer B:

$${}^sE'{}_j{}^{j'}.x_{j'} = 2.A^s{}_{j'j''}.E_j{}^{j'}.{}^{j''}F' + 2.B^s{}_{j'}.E_j{}^{j'} \qquad ;$$

il apparaîtra que pour n>1, B n'est pas identiquement nul: on a seulement B(t,x) = 0, pour t = 0.

Comme on l'a fait déjà pour deux autres équations, plutôt que de laisser libre l'indice s, on le contracte avec un terme β_s, qui peut être assimilé à un endomorphisme symétrique, et s'incorpore dans des différentielles non commutatives, pour lesquelles on a introduit la notation H(t ; ß).

Compte tenu de ce que E(t) = (1/cos2t), le membre de gauche, ß.E'.x, satisfait l'équation:

$$\beta_s.{}^sE'{}_j{}^{j'}.x_{j'} = 2.H(t\,;\,\beta)_j{}^{j'}.x_{j'} \quad ;$$

où $H(t) = \sin 2t.(\cos 2t)^{-2}$. Ce membre de gauche peut, d'après l'équation (1) est égal à une somme de deux termes, que nous donnerons successivement, en supprimant le coefficient 2 et utilisant d'autres indices. Dans le premier terme, on utilise le calcul de ß.A, fait plus haut; et, pour calculer F', on dérive l'expression F = (1/2).tg2t.x.x; ainsi, il vient:

$$
\begin{aligned}
ß_s . A^s{}_{kh} . E_j{}^k . {}^hF' &= E_j{}^k . (\cos2t.D'(t\,;ß).\cos2t)_k{}^h . (tg2t)_h{}^{j'}.x_{j'} \quad ;\\
&= (1/\cos2t)_j{}^k . (\cos2t.D'(t\,;ß).\cos2t)_k{}^h . (tg2t)_h{}^{j'}.x_{j'} \quad ;\\
&= D'(t\,;ß)_j{}^k . (\sin2t)_k{}^{j'} . x_{j'} \quad ;
\end{aligned}
$$

formules où on a tenu compte de ce que les produits de fonctions entières matricielles se simplifient comme les produits de fonctions réelles; e.g. : cos2t . tg2t = sin2t.

Quant au deuxième terme, on a:

$$ß_s . B^s{}_h . E_j{}^h = (1/\cos2t)_j{}^h . ß_s . ({}^sB0_h + {}^sB1(t)_h{}^{j'}.x_{j'}) \quad ;$$

en identifiant les deux membres de l'équation (1), on voit que B0 est nul, étant le seul terme qui ne soit pas linéaire et homogène en x; et l'on a, pour B1, l'équation:

$$
\begin{aligned}
H(t\,;ß)_j{}^{j'}.x_{j'} &= D'(t\,;ß)_j{}^k.(\sin2t)_k{}^{j'}.x_{j'} + (1/\cos2t)_j{}^h . ß_s . {}^sB1(t)_h{}^{j'}.x_{j'} \quad ;\\
H(t\,;ß)_j{}^{j'} - D'(t\,;ß)_j{}^k.(\sin2t)_k{}^{j'} &= (1/\cos2t)_j{}^h . ß_s . {}^sB1(t)_h{}^{j'} \quad ;\\
\cos2t.H(t\,;ß) - \cos2t.D'(t\,;ß).\sin2t &= ß_s . {}^sB1(t) \quad ;
\end{aligned}
$$

si t et ß commutent, notamment pour n=1, chacun des deux termes de droite est égal à tg2t.ß; et leur différence, ß.B1(t), est nulle. Pour n >1, on a seulement B1(0)=0; on retrouve, ici encore, la forme réduite de [REL. CONT. SPAT.], §8. Pour t quelconque, on vérifie que H(t ; ß) n'est pas égal à D'(t ; ß).sin2t. En effet, dans H(t ; ß), le terme de plus bas degré en t est (t.ß+ß.t); tandis que, dans D'(t ; ß), c'est ß; et donc, dans D'(t ; ß).sin2t, c'est 2.ß.t ; donc ß.B1 $\neq$ 0.

Reste à déterminer C d'après l'équation (0) :

$$
\begin{aligned}
&{}^sF = A^s{}_{jj'} . {}^jF' . {}^{j'}F' + 2 . B^s{}_j . {}^jF' + C^s \quad ; \quad \text{où on a :}\\
&F(t, x) = F2(t)^{jj'}.x_j.x_{j'} = (1/2) . tg2t^{jj'}.x_j.x_{j'} \quad .
\end{aligned}
$$

Il apparaît que les termes en F (à gauche) et F' (à droite) de l'équation (0) sont quadratiques en x; C se réduit donc à son terme en C2; en composant avec ß (afin de supprimer finalement les x), il vient, pour les différents termes:

$$ß_s\,.\,{}^sF \;=\; D'(t\,;ß)^{hk}.x_h.x_k \;=\; D'(t\,;ß)_h{}^k.x^h.x_k \qquad ;$$

$$\begin{aligned} ß_s.A^s{}_{jj'}.{}^jF'\,.{}^{j'}F' &= (\cos 2t.D'(t\,;ß).\cos 2t)_{jj'}\,.\mathrm{tg}2t^{hj}.\mathrm{tg}2t^{kj'}.x_h.x_k \\ &= \mathrm{tg}2t_h{}^j.(\cos 2t.D'(t\,;ß).\cos 2t)_j{}^{j'}.\mathrm{tg}2t_{j'}{}^k.x^h.x_k \\ &= (\sin 2t.D'(t\,;ß).\sin 2t)_h{}^k.x^h.x_k \qquad ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ß_s.B^s{}_j.{}^jF' &= (\cos 2t.H(t\,;ß) - \cos 2t.D'(t\,;ß).\sin 2t)_j{}^k\,.\,x_k\,.\,\mathrm{tg}2t_h{}^j\,.\,x^h \\ &= \mathrm{tg}2t_h{}^j.(\cos 2t.H(t\,;ß) - \cos 2t.D'(t\,;ß).\sin 2t)_j{}^k.x^h.x_k \\ &= (\sin 2t.H(t\,;ß) - \sin 2t.D'(t\,;ß).\sin 2t)_h{}^k.x^h.x_k \qquad ; \end{aligned}$$

d'où, en symétrisant le terme en H afin d'éliminer les x et faire apparaître le coefficient $C2^s$, au lieu de C^s:

$$ß_s.C2^s = D'(t\,;ß) \;+\; \sin 2t.D'(t\,;ß).\sin 2t \;-\; (\sin 2t.H(t\,;ß) + H(t\,;ß).\sin 2t) \;\; ;$$

dans le cas particulier où t et ß commutent, il vient:

$$ß.C2 = ß\,.\,((1/\cos 2t)^2 + (\mathrm{tg}2t)^2 - 2.(\mathrm{tg}2t)^2) = ß \;\; ;$$

on retrouve de nouveau le cas n=1; et la forme réduite pour t = 0 :

$$ß_s.C^s(x) = ß^{hk}.x_h.x_k \;\; ;$$

Pour démontrer qu'en général ß.C2 dépend effectivement de t, on procède comme pour ß.B1. De façon précise, on trouve dans D'(t ; ß), après le terme ß, de degré 0 en t, le terme de degré 2: (4/3).(ßtt+tßt+ttß); tandis que, dans H(t ; ß), le terme de plus bas degré en t est ßt+tß. D'où, pour ß.C2, l'expression suivante:

$$ß + (4/3).(ßtt+tßt+ttß) + 4.tßt \;-\; (2.t.(ßt+tß) + (ßt+tß).2.t) + \ldots$$

soit : $\quad ß + (4/3).tßt - (2/3).(ßtt+ttß) + \ldots \qquad ;$

où l'expression qui suit le terme ß n'est pas identiquement nulle si ß et t ne commutent pas.

10 Conclusion

Partant du modèle de l'oscillateur harmonique en dimension 1, on a, d'après des contrexemples considérés au §2, délimité une classe d'équations aux dérivées partielles, généralisée ensuite, au §5, pour le cas d'un espace de base de dimension *n* quelconque. La connexion associée à une telle équation est définie, avec sa courbure, au §6. Dans les §§ suivants, on précise la condition d'existence de solutions pour l'équation; ainsi que la généralité du modèle de solutions que fournit l'exemple des ondes quadratiques.

Références bibliographiques

a) Représentation du groupe unitaire comme extension du groupe orthogonal usuel (à 3 variables) par des opérateurs différentiels du second ordre; cette représentation est utilisée par J. P. ELLIOTT pour une symétrie approchée en physique nucléaire:

Freeman J. DYSON: *Symmetry Groups in Nuclear and Particle Physics, A Lecture-Note and Reprint Volume*; Benjamin, (1966).

J. P. ELLIOTT: "Collective motion in the nuclear shell model; I. Classification schemes for states of mixed configurations", in *Proc. Royal Society* (London) A245, 128 (1958). (Cet article est reproduit dans le livre de F. J. DYSON.)

J. P. ELLIOTT: "Collective motion in the nuclear shell model; II.", in *Proc. Royal Society* (London) A245, 562 (1958).

J. P. ELLIOTT & M. HARVEY: *Proc. Royal Society* (London) A272, 557 (1963). (référence citée sans titre).

b) Définition d'un espace étendu et de la structure différentielle associée aux fonctions étendues, définition fondée sur le modèle de a):

J.-P. BENZÉCRI: "Symétrie entre moment et position en mécanique quantique et relativisation du continuum spatio-temporel", [REL. CONT. SPAT.], in *CAD*, Vol. XV, n°2, pp. 209-230; (1990).

J.-P. BENZÉCRI: *Connexion associée à une classe d'équations aux dérivées partielles*, [CONNEX.]; non publié.