Les Cahiers de l'Analyse des Données
Vol. XIX - 1994 - n°3 - pp.353-366.

SUR L'EXISTENCE D'UNE MESURE POSITIVE DE FORME GÉNÉRIQUE POUR LES TRANSFORMATIONS PROJECTIVES

[FORME MESURE PROJ.]

*H. M. BADRAN**
*M. OUASSOU***

0 Introduction: forme générique pour les parties compactes et forme générique pour les lois

Avec la distance entre compacts utilisée dans [FORMES PROJECT.] (in *CAD*, Vol.XIX, n°2), un système de n^2 points, quadrillant régulièrement un carré de côté 1, tend vers ce carré quand $n \to \infty$. Une telle notion de limite rappelle celle de limite vague pour les mesures de RADON (cf. N. BOURBAKI, L.VI, cap.iii; notamment §2, ex.7b: avec, sur le segment (0,1), une densité sinusoïdale de plus en plus serrée oscillant entre 0 et 2, on a pour limite vague la mesure de densité 1).

On se demande si, de même qu'on a construit un compact universel, en ce sens que par transformation projective il peut être rendu arbitrairement proche de tout compact normalisé, il n'existerait pas une mesure positive, universelle.

Il faut poser que la transformation projective des mesures s'effectue en tenant compte du Jacobien: en bref, la masse, transportée de x en $f(x)=x'$, est, de plus, multipliée par le jacobien de f en x. Cette transformation ne conserve pas la masse totale d'une mesure; et par le simple jeu de l'homothétie, engendre, à partir de la loi la plus simple, une masse ponctuelle unité, l'ensemble, non compact, de toutes les masses ponctuelles arbitrairement fortes ou faibles.

On se bornera donc à démontrer que, muni d'une topologie convenable, est compact l'ensemble L(K) des lois, ou mesures positives de masse totale 1, dont le support est inclus dans un compact fixe K; et on cherchera, dans L(K), une mesure positive μ, générique en ce sens que l'ensemble de ses transformées projectives, réduites à avoir masse 1 (en divisant toute mesure transformée par sa masse totale) est partout dense dans L(K).

(*) Maître assistant à l'Université Libanaise à Beyrouth.
(**) Étudiant en Doctorat à l'Université Pierre et Marie CURIE.

Les cahiers de l'analyse des données 0339-3097/94/03/14/$ 4.00/© Gauthier-Villars

Le présent travail comprend deux parties. Dans la première partie, on reprend succintement, sous forme géométrique, l'étude topologique et métrique des ensembles de mesures positives.

La deuxième partie est consacrée à la construction d'une mesure positive de forme générique, pour le groupe projectif; dans le cas où le compact support est une sphère (plus exactement une boule) de dimension quelconque.

1 L'espace compact des lois sur un espace métrique compact

1.1 Définition de deux distances entre lois sur un espace métrique compact

Prenons comme espace de base un espace métrique compact K, muni d'une distance ∂; éventuellement, K est une partie compacte d'un espace métrique E, et on se restreint aux mesures sur E dont le support est inclus dans K. (Afin de simplifier les notations, on supposera que K a pour diamètre 1).

Sur l'ensemble L(K) des lois de probabilité sur K (ou mesures positives de masse totale 1), on définit deux distances: distance du maximum et distance de la moyenne. De façon précise, soit μ et μ' deux lois sur K; il existe certainement, sur le produit $K \times K$, des lois $\mu\mu$ qui, telle $\mu \times \mu'$, se projettent sur les deux facteurs de $K \times K$ suivant μ et μ' respectivement; pour toute loi $\mu\mu$ sur $K \times K$, $\mu\mu \in L(K \times K)$, on définit un écart maximum, ∂s, et un écart moyen, ∂m, à la diagonale:

$$\partial s(\mu\mu) = \max\{\partial(x,x') \mid (x,x') \in \sup(\mu\mu)\} ;$$

$$\partial m(\mu\mu) = \int\{\partial(x,x') \,.\, d\mu\mu\} .$$

À partir de ces notions d'écart à la diagonale, sont définies les notions de distance entre lois, notées par les mêmes sigles:

$$\partial i(\mu,\mu') = \inf\{\partial i(\mu\mu) \mid \mu\mu \in \mathrm{Mes}(K \times K);\ pr_1(\mu\mu)=\mu\ ;\ pr_2(\mu\mu)=\mu'\} ;$$

formule où ∂i peut être ∂s ou ∂m.

On peut dire que pour transformer μ en μ', il faut déplacer des masses élémentaires, la distance parcourue étant variable selon les masses; avec un déplacement maximum ∂s et un déplacement moyen ∂m.

Il est clair que $\partial m(\mu,\mu') \leq \partial s(\mu,\mu')$; car, en bref, ∂m se calcule comme moyenne de quantités dont ∂s est le sup. Mais rien de tel n'existe en sens inverse: ∂s peut rester constant alors que ∂m tend vers 0. Un exemple très simple est donné par l'ensemble des lois sur un espace K réduit à deux points entre lesquels la distance est 1. Muni de la distance ∂m, l'ensemble des lois s'identifie à un segment de longueur 1; avec la distance ∂s, la distance entre deux mesures distinctes quelconques est 1.

1.2 Axiomes de la distance: la distance nulle

Reste à montrer que ∂i est une distance.

Il est clair que $\partial i(\mu,\mu)=0$: on le voit en prenant pour $\mu\mu$ la loi convenable portée par la diagonale de $K \times K$.

Pour démontrer que $\partial i(\mu,\mu') = 0$ implique $\mu=\mu'$, il suffit de démontrer que, pour toute fonction continue f sur K, $\partial i(\mu,\mu') = 0$ implique $\int f.d\mu=\int f.d\mu'$. Notons $f1$ et $1f$ respectivement les fonctions sur $K \times K$ définies par:

$f1(x,x') = f(x)$; et : $1f(x,x')=f(x')$ (fonctions produit).

Il est clair que, si $\mu\mu$ satisfait aux conditions de projection, on a:

$$\int f1.d\mu\mu = \int f.d\mu \text{ et } \int 1f.d\mu\mu = \int f.d\mu';$$

d'où :

$$(\int f.d\mu - \int f.d\mu') = \int (f1-1f).d\mu\mu \;;$$

or cette dernière intégrale peut être majorée, en valeur absolue, par une quantité arbitrairement faible si l'écart (∂m ou ∂s) de $\mu\mu$ à la diagonale est assez faible.

Précisons la démonstration dans le cas, le plus complexe, de ∂m. On a recours au lemme suivant: soit $\varepsilon\pi s$ un réel positif et f une fonction continue à valeur réelle sur K, majorée en module par 1; on peut trouver une quantité eps telle que quelles que soient les deux lois μ et μ', l'inégalité $\partial m(\mu,\mu') <$ eps implique $|\int f.d\mu - \int f.d\mu'| < \varepsilon\pi s$.

Du fait de la continuité uniforme de f, on peut touver un entier n tel que $|x-x'|<(1/n)$ implique $|f(x)-f(x')|<(\varepsilon\pi s/2)$; ou, ce qui est équivalent, $|f1-1f| < (\varepsilon\pi s/2)$; et on impose, de plus, que $(1/n)<(\varepsilon\pi s/4)$.

On va montrer que $(1/n^2)$ est un eps convenable.

Soit en effet $\mu\mu$, se projetant suivant μ et μ', et tel que $\int\{\partial(x,x').d\mu\mu\} < (1/n^2)$: il est clair que la partie A de $K \times K$ sur laquelle $((1/n)<\partial(x,x'))$ a, pour $\mu\mu$, une mesure $< (1/n)$. On décompose donc l'intégrale $\int(f1-1f).d\mu\mu$ en deux parties: intégrale sur A, dont la valeur absolue est majorée par 2/n, donc par $\varepsilon\pi s/2$; et intégrale sur $K \times K$ - A, laquelle, de par la continuité de f, est majorée également par $\varepsilon\pi s/2$. On a donc bien $\int(f1-1f).d\mu\mu < \varepsilon\pi s$; CQFD.

Ce lemme de majoration sera souvent repris dans la suite.

1.3 Inégalité du triangle pour les distances ∂s et ∂m entre lois sur K

L'inégalité du triangle peut se démontrer en considérant un espace produit de trois facteurs isomorphes $K \times K' \times K''$; soit $\mu\mu'$ une loi sur $K \times K'$ se projetant suivant deux lois données μ et μ'; et de même $\mu\mu''$, loi sur $K \times K''$ se projetant suivant μ et μ''. Nous supposons d'abord, sans le démontrer, qu'il existe, sur le produit $K \times K' \times K''$, une loi $\mu\mu\mu$ se projetant respectivement sur $K \times K'$ et sur $K \times K''$ suivant les lois $\mu\mu'$ et $\mu\mu''$.

Cette loi $\mu\mu\mu$ se projette sur $K' \times K''$ suivant une loi $\mu\mu''$ pour laquelle on a $\partial i(\mu\mu'') \leq \partial i(\mu\mu')+\partial i(\mu\mu'')$: en effet, sur $K \times K' \times K''$, on a, pour tout triplet (x, x', x''):

$$\partial(x', x'') \leq \partial(x, x')+\partial(x, x'') ;$$

et l'on a qu'à passer au sup sur cette inégalité sur le support de $\mu\mu\mu$ (si i=s), ou l'intégrer par rapport à cette mesure (si i=m).

Si donc les lois $\mu\mu'$ et $\mu\mu''$ ont été choisies de telle sorte que les écarts $\partial i(\mu\mu')$ et $\partial i(\mu\mu'')$ soient arbitrairement proches, repectivement, de $\partial i(\mu,\mu')$ et $\partial i(\mu,\mu'')$; on en conclut que $\partial i(\mu\mu'')$ fournit pour $\partial i(\mu',\mu'')$ une borne supérieure arbitrairement proche de $\partial i(\mu,\mu')+\partial i(\mu,\mu'')$: ce qui établit l'inégalité du triangle demandée.

Reste à construire une loi $\mu\mu\mu$, sur $K \times K' \times K''$, ayant, sur $K \times K'$ et sur $K \times K''$, des projections imposées, $\mu\mu'$ et $\mu\mu''$, satisfaisant à la condition de compatibilité d'avoir même projection, μ, sur K. La construction est immédiate dans le cas particulier où la loi μ est un système fini de masses ponctuelles, indicé par j dans J; ce qu'on peut noter:

$$\mu = \Sigma\{\mu[j] \, . \, \pi(x_j) \mid j \in J\} ;$$

(où les x_j sont des points de l'espace K; $\pi(x)$ est la masse unité au point x; et $\mu[j]$ est la valeur de la masse placée en x_j). On a alors pour la lois μ' une décomposition:

$$\mu' = \Sigma\{\mu[j] \, . \, \pi(x_j) \times £'_j \mid j \in J\} ;$$

où les $£'_j$ sont des lois sur μ'; et de même pour μ'', en remplaçant l'indice "'" par "''". En posant:

$$\mu\mu\mu = \Sigma\{\mu[j] \, . \, \pi(x_j) \times £'_j \times £''_j \mid j \in J\} ;$$

on a une loi $\mu\mu\mu$ qui a les projections demandées.

En général, on a des transitions t' et t'' de $K \to K'$ et $K \to K''$ qui sont des versions des lois $\mu\mu'$ et $\mu\mu''$; et la transition produit $t' \times t''$ de K vers $K' \times K''$ construit, à partir de μ, une loi $\mu\mu\mu$ convenable. On peut encore, sans recourir à la théorie des transitions sous sa forme la plus générale, substituer aux mesures des approximations par des systèmes finie de masses; ainsi qu'on le fera partout dans la suite.

1.4 Limite vague de lois et limite au sens de la distance ∂m

On dit classiquement (cf. BOURBAKI) qu'une loi μ_∞ est limite vague d'une suite de lois $\{\mu_j \mid j=1, 2,\ldots\}$ si, quelle que soit la fonction continue f sur K l'intégrale $\int f.d\mu_\infty$ est limite de la suite des intégrales $\int f.d\mu_j$. Et μ_∞ est limite de μ_j, pour la métrique ∂m, si tend vers 0 la suite des distances $\partial m(\mu_j, \mu_\infty)$.

On montrera que ces deux notions de limite sont équivalentes.

A) Si $\partial m(\mu_j, \mu_\infty) \to 0$, μ_∞ est limite vague des μ_j :

on reprend le lemme de majoration déjà utilisé pour établir que $(\partial m(\mu,\mu')=0)$ implique $(\mu=\mu')$; f étant donnée (majorée par 1 en module), on peut, quel que soit $\varepsilon\pi s>0$ trouver eps tel que $\partial m(\mu_j, \mu_\infty)<$eps implique $|\int f.d\mu_j - \int f.d\mu_\infty|<\varepsilon\pi s$.

B) Si μ_∞ est limite vague des μ_j, $\partial m(\mu_j, \mu_\infty) \to 0$:

en bref, pour démontrer qu'à partir d'une valeur de j convenable $\partial m(\mu_j, \mu_\infty)$ reste inférieur à un seuil arbitraire, que pour la commodité des notations on écrit 3.eps, on construit, en calculant des intégrales, des approximations des $\{\mu_j, \mu_\infty\}$ par un système fini de masses.

De façon précise, on recourra aux constructions classiques des partitions de l'unité subordonnées à un recouvrement fini de l'espace compact K. La distance eps étant fixée, on choisit un recouvrement fini de K par des boules de rayon eps/2 et centre x_i; et une partition de l'unité, $1=\Sigma\{f_i\}$, par des fonctions fi ayant chacune son support dans la boule de centre xi et rayon eps.

Il est clair que toute loi μ est égale à la somme finie $\Sigma\{f_i.\mu\}$; et que, si on prend pour μ' le système fini des masses $\int\{f_i.d\mu\}$ portées par les x_i, on aura $\partial(\mu, \mu') \leq$ eps. Car, en bref, avec un déplacement $\leq$eps, la masse de la mesure $f_i.\mu$ peut être concentrée en x_i. On notera N(eps) l'ensemble fini des centres x_i choisis.

Ainsi, on a, pour $\{\mu_j, \mu_\infty\}$, des approximations $\{\mu'_j, \mu'_\infty\}$ de la forme cherchée. D'où, par l'inégalité du triangle, la majoration:

$$\begin{aligned}\partial m(\mu_j, \mu_\infty) &\leq \partial m(\mu j, \mu' j) + \partial m(\mu'_j, \mu'_\infty) + \partial m(\mu'_\infty, \mu_\infty)\\ &\leq 2.\text{eps} + \partial m(\mu'_j, \mu'_\infty)\,.\end{aligned}$$

La distance $\partial m(\mu'_j, \mu'_\infty)$, entre systèmes finis de masses portés par les $x_i \in$ N(eps), peut être majorée par la somme des valeurs absolues des différences entre ces masses (car, en bref, chaque système se compose du système de l'inf des masses et de résidus qui sont des différences). Or ces masses partielles

1.4 Limite vague de lois et limite au sens de la distance ∂m

On dit classiquement (cf. BOURBAKI) qu'une loi μ_∞ est limite vague d'une suite de lois $\{\mu_j \mid j=1, 2,\dots\}$ si, quelle que soit la fonction continue f sur K l'intégrale $\int f.d\mu_\infty$ est limite de la suite des intégrales $\int f.d\mu_j$. Et μ_∞ est limite de μ_j, pour la métrique ∂m, si tend vers 0 la suite des distances $\partial m(\mu_j, \mu_\infty)$.

On montrera que ces deux notions de limite sont équivalentes.

A) Si $\partial m(\mu_j, \mu_\infty) \to 0$, μ_∞ est limite vague des μ_j :

on reprend le lemme de majoration déjà utilisé pour établir que $(\partial m(\mu,\mu')=0)$ implique $(\mu=\mu')$; f étant donnée (majorée par 1 en module), on peut, quel que soit $e\pi s>0$ trouver eps tel que $\partial m(\mu_j, \mu_\infty)<$eps implique $|\int f.d\mu_j - \int f.d\mu_\infty|<e\pi s$.

B) Si μ_∞ est limite vague des μ_j, $\partial m(\mu_j, \mu_\infty) \to 0$:

en bref, pour démontrer qu'à partir d'une valeur de j convenable $\partial m(\mu_j, \mu_\infty)$ reste inférieur à un seuil arbitraire, que pour la commodité des notations on écrit 3.eps, on construit, en calculant des intégrales, des approximations des $\{\mu_j, \mu_\infty\}$ par un système fini de masses.

De façon précise, on recourra aux constructions classiques des partitions de l'unité subordonnées à un recouvrement fini de l'espace compact K. La distance eps étant fixée, on choisit un recouvrement fini de K par des boules de rayon eps/2 et centre x_i; et une partition de l'unité, $1=\Sigma\{f_i\}$, par des fonctions fi ayant chacune son support dans la boule de centre xi et rayon eps.

Il est clair que toute loi μ est égale à la somme finie $\Sigma\{f_i.\mu\}$; et que, si on prend pour μ' le système fini des masses $\int\{f_i.d\mu\}$ portées par les x_i, on aura $\partial(\mu, \mu') \leq$ eps. Car, en bref, avec un déplacement $\leq$eps, la masse de la mesure $f_i.\mu$ peut être concentrée en x_i. On notera N(eps) l'ensemble fini des centres x_i choisis.

Ainsi, on a, pour $\{\mu_j, \mu_\infty\}$, des approximations $\{\mu'_j, \mu'_\infty\}$ de la forme cherchée. D'où, par l'inégalité du triangle, la majoration:

$$\begin{aligned}\partial m(\mu_j, \mu_\infty) &\leq \partial m(\mu j, \mu' j) + \partial m(\mu'_j, \mu'_\infty) + \partial m(\mu'_\infty, \mu_\infty)\\ &\leq 2.\text{eps} + \partial m(\mu'_j, \mu'_\infty)\ .\end{aligned}$$

La distance $\partial m(\mu'_j, \mu'_\infty)$, entre systèmes finis de masses portés par les $x_i \in$ N(eps), peut être majorée par la somme des valeurs absolues des différences entre ces masses (car, en bref, chaque système se compose du système de l'inf des masses et de résidus qui sont des différences). Or ces masses partielles étant calculées par des intégrales $\int\{f_i.d\mu_j\}$ qui (d'après l'hypothèse de limite vague) convergent vers les $\int\{f_i.d\mu_\infty\}$, on peut déterminer j au-delà duquel $\partial m(\mu'_j, \mu'_\infty)$<eps. CQFD.

1.5 L'espace L(K), muni de ∂m, est séparable

Plus généralement, on peut montrer qu'existe dans K une partie dénombrable, N, telle que, pour toute loi μ et tout nombre positif eps, existe un système fini μ' de masses ponctuelles, porté par N et tel que $\partial s(\mu,\mu') \leq$ eps (donc, cf. *supra*, *a fortiori*: $\partial m(\mu,\mu') \leq$ eps). Il suffit de prendre une suite $\{eps_1, eps_2, \ldots eps_u, \ldots\}$ de valeurs de eps tendant vers 0, par exemple, 1/2, 1/4, 1/8...; pour chaque valeur de eps on a un ensemble fini de centres N(eps)=$\{x_i\}$; et la réunion de ces ensembles sera un N convenable.

La même construction sert à montrer que pour la distance moyenne ∂m (et non pour ∂s: cf. *supra*, exemple de K réduit à deux points), l'espace L(K) est séparable, i.e. contient une partie dénombrable partout dense.

Reprenons la suite finie de valeurs de eps considérée ci-dessus; pour chaque eps_p, on a pris un ensemble fini N(eps); et la réunion des ensembles de lois ayant pour support l'un des N(eps_p) est partout dense dans l'ensemble de toutes les lois sur K.

Pour établir que K est séparable pour la distance ∂m, il suffit de montrer que, dans l'ensemble L(N(eps)) des lois de support N(eps), on peut choisir une partie finie L(eps), de telle sorte que, pour tout $\mu \in$ L(N(eps)), existe $\mu' \in$ L(eps) avec $\partial m(\mu, \mu') \leq$ eps. D'où résultera que pour toute loi μ de support quelconque (non nécessairement fini) sur K, existe μ' dans L(eps) avec $\partial m(\mu,\mu') \leq 2$.eps.

Il suffit de prendre pour L(eps) l'ensemble des lois composées de masses ponctuelles de la forme (r/q); où q est un entier choisi, en fonction de eps, tel que Card(N(eps))<q.eps; et les numérateurs r sont des entiers positifs de somme q (afin qu'on ait bien une loi). En effet, reprenant la majoration déjà utilisée à la fin du § précédent, on voit que pour passer d'une loi μ, de support N(eps), à son approximation par une loi μ', de même support, dont les masses soient rationnelles en (r/q), il faut au plus déplacer un total de masse Card(N(eps))/q; et ce d'une distance au plus égale au diamètre de l'espace K; diamètre qu'on a supposé ≤1 (cf. supra; sans cette hypothèse, il suffit de demander pour q l'inégalité: Card(N(eps)).diam ≤ q.eps).

1.6 Compacité de l'espace L(K) muni de ∂m

On poursuit en démontrant que, muni de la distance ∂m, L(K) est compact. Il suffit de montrer que, dans L(K), toute suite infinie admet au moins un point adhérent; ou plus précisément, que de toute suite infinie on peut extraire une suite convergente.

Notons $\{\mu_j\}$ une suite de lois; $\{eps_u\}$ la suite de valeurs de eps déjà considérée; L_u=L(eps_u) (ensemble fini de lois à support fini, N(eps_u): cf. *supra*); $\mu_u(\mu)$, la loi qui, de l'ensemble fini L_u, est la plus proche d'une loi μ quelconque. On peut extraire de $\{\mu_j\}$ une sous-suite pour laquelle la suite des $\mu_1(\mu_j\}$ est stationnaire: cela résulte immédiatement de ce que L_1 est fini. Notons $\mu(1)$ le premier élément de cette sous-suite à partir duquel $\mu_1(\mu_j)$ reste constant; de ce qui vient après $\mu(1)$, on peut extraire une sous-suite pour laquelle $\mu_2(\mu_j)$ est stationnaire: on note $\mu(2)$ le premier élément, distinct de $\mu(1)$, à partir duquel $\mu_2(\mu_j)$ reste constant.

Il est clair que le procédé peut être poursuivi indéfiniment pour produire une suite $\{\mu(1), \mu(2), \mu(3), \ldots, \mu(p),\ldots\}$ pour laquelle, à partir du rang q=p, $\mu_p(\mu(q))$ est constant: on notera désormais cette valeur stationnaire:

$$\mu_p(\mu(p)) = \mu'(p) \in L_p = L(eps_p).$$

On se propose de démontrer que la suite $\{\mu(p)\}$, et celle des $\{\mu'(p)\}$, ont pour limite une loi qu'on notera $\mu(\infty)$; la limite étant comprise au sens de la distance ∂m.

On déterminera d'abord $\mu(\infty)$, comme limite vague, i.e. par son intégrale pour toute fonction réelle continue f sur K; d'où il résultera qu'il s'agit d'une limite de mesure pour la distance ∂m (cf. *supra*).

Rappelons un lemme démontré antérieurement:

Soit $\varepsilon\pi s$ un réel positif et f une fonction continue à valeur réelle sur K, majorée en module par 1; on peut trouver une quantité eps telle que, qelles que soient les deux lois μ et μ', l'inégalité $\partial m(\mu,\mu')<eps$ implique $|\int f.d\mu - \int f.d\mu'|<\varepsilon\pi s$.

Si on se place (dans la suite déjà fixée des eps_u), à un rang p tel que: $2.eps_p < eps$; on aura, pour $q\geq p$, $\partial m(\mu(q),\mu'(p)) \leq eps$; et, à partir de q=p, on aura :

$$|\int f.d\mu(q) - \int f.d\mu'(p)|<\varepsilon\pi s\ ;$$

l'intégrale de f par rapport à $\mu(q)$ sera donc stationnaire à $2.\varepsilon\pi s$ près pour $q\geq p$. De ce que $\varepsilon\pi s$ peut être choisi arbitrairement petit, il résulte que $\int f.d\mu(q)$ converge quand q -> ∞; $\mu(\infty)$ se trouve ainsi déterminée comme limite vague de la suite des $\mu(q)$ (au sens de BOURBAKI); ou, indirectement, comme limite de la suite des $\mu'(q)$. Or, selon ce qui a été démontré plus haut, cette limite vague est également une limite au sens de la distance ∂m; CQFD.

2 Sur l'existence d'une mesure positive de forme générique pour les transformations projectives

Nous supposerons désormais que l'espace support des mesures positives considérées est un espace numérique R^n; ou, ce qui, localement, revient au même, un espace projectif. Puisque le support *stricto sensu* est compact, les mêmes formes de lois, à une transformation affine près qui change l'échelle, se retrouvent avec support inclus dans un cube ou une sphère quelconque. Ceci nous paraît suggérer que, pour la recherche d'une forme générique dans L(K), le compact K est arbitraire; et autorise le choix, pour K, d'une sphère; laquelle se prête aux constructions exposées dans la suite.

Pour construire une forme générique de corps convexe, on a recours à la construction de raccordement des convexes; laquelle, à partir de deux convexes C_1 et C_2, en produit un troisième qui, par tranformation projective, peut être rendu arbitrairement proche de C_1 ou de C_2; le raccordement des convexes a également servi pour construire un forme compacte universelle.

Ici, on reprend le schéma du §10 de l'article [FORMES PROJECT.]; avec une boule de dimension n+1 quelconque, au lieu du disque de dimension 2; et le raccordement des mesures se fait, en bref, en additionnant des mesures obtenues en transformant projectivement des mesures données, d'abord, sur une tranche centrée à l'origine.

2.1 Groupe des translations hyperboliques de la boule unité

De façon précise, le compact K est la boule unité d'équation $x^2 + y^2 \leq 1$, où y est une variable vectorielle de dimension n (si n=0, K est le segment [-1 +1]; si n=1, K est un disque; etc.) dont la norme est notée y^2.

La boule est invariante, dans son ensemble, par un groupe à un paramètre de transformations projectives; dont chacune laisse fixes les deux points diamétralement opposés P-, (x=-1, y=0), et P+, (x=1, y=0); et, de plus, transforme toute corde parallèle (d'abscisse x) à l'axe des y en une corde de même direction (d'abscisse x'); le décalage ($x \to x'$) étant défini par la relation:

$$(1+x')/(1-x') = m^2 \,.\, (1+x)/(1-x) \;;$$

décalage vers la droite ou vers la gauche selon que le paramètre positif, noté m, est >1 ou <1. La tranformation T(m) des deux coordonnées $(x, y) \to (x', y')$ est donnée par les formules:

$$x' = ((m^2 -1) + (x.(m^2 +1)) \;/\; ((m^2 +1) + (x.(m^2 -1)) \quad ;$$

$$y' = 2.m.y \;/\; ((m^2 +1) + (x.(m^2 -1)) \;.$$

Le groupe, $\{T\} = \{T(m) \mid 0 < m < \infty\}$ est abélien, et l'on a la loi de composition $T(m) \circ T(m') = T(m.m')$.

Prenons une coordonnée auxiliaire logarithmique:

$$X=(1/2)\mathrm{Log}(((1+x)/(1-x)) \quad ;$$

quand x va de -1 à +1, X va de $-\infty$ à $+\infty$; et on a, de X à x, la transformation inverse: $x = \mathrm{th}X$:

$$(1+x)/(1-x) = \exp(2X) \quad ; \quad 1+x = (1-x).\exp(2X)$$

$$x.(1+\exp(2X)) = \exp(2X) - 1 \; ; \; x = \mathrm{th}(X) \; ; \; X = \mathrm{argth}(x)$$

et $\{T\}$ agit sur X comme un groupe de translations T(M):

$$X' = X + M \; ; \text{ où } M = \mathrm{Log}(m) .$$

L'échelle de la transformation des y est déterminée par la condition que le disque, ensemble des points de la boule qui ont pour abscisse x, est transformé dans le disque d'abscisse x'.

On peut encore noter que chacun des ellipsoïdes de révolution d'axe (P-, P+) est invariant par le groupe $\{T\}$; de même que chaque ellipse section d'un tel ellipsoïde par un plan passant par P- et P+. L'intersection d'une ellipse avec l'hyperplan x=X=0 est un point (0, Y), extrémité du petit axe; à un point (x, y) quelconque de la boule correspond une ellipse et un point (0, Y(x, y)); le signe de Y étant choisi pour que les points (x, y) et (0, Y) soient sur une même demi-ellipse joignant P- à P+. Aux poles P- et P+, on pose Y=0.

Avec les coordonnées (X, Y), l'action du groupe $\{T\}$ s'écrit simplement:

$$(X', Y') = (X+M, Y) \quad ;$$

cette formule suggère d'appeler $\{T\}$: groupe des transitions hyperboliques de la boule K.

2.2 Transport d'une mesure par une translation hyperbolique

Nous convenons de définir comme suit la transformée $f\mu$ d'une mesure par une transformation projective, ou, plus généralement, par un difféomorphisme f de K. Dans le cas particulier où la mesure μ est l'intégrale par rapport à l'élément de volume de K étendue à une partie mesurable A de K, la mesure $f\mu$ n'est autre que l'intégrale de ce même élément de volume, étendue à l'image f(A) de A par f. Dans le cas général l'intégrale d'une fonction g(x,y) par rapport à $f\mu$ s'écrit:

$$\int g(x, y)\, df\mu(x, y) = \int (g \circ f)(x, y).\{Df/D(x,y)\}.d\mu(x, y) \; ;$$

où $\{Df/D(x, y)\}$ est le jacobien de l'application f, au point (x, y). On notera qu'il ne s'agit pas d'un simple transport des masses par f; mais que les masses transportées sont pondérées par le jacobien: en particulier, elles sont réduites s'il y a contraction du volume.

Pour une translation hyperbolique T(m), le jacobien dépend seulement de x, non de y: car restreinte au disque y = cte, la transformation T(m) est une homothétie de rapport:

$$2.m / ((m^2 +1) + (x.(m^2 -1))) \quad ;$$

Par rapport aux coordonnées auxiliaires (X, Y), le jacobien de T(M) est évidemment constant et égal à 1; ceci montre que le jacobien, JT, de T(m) n'est autre que le quotient des valeurs du jacobien de changement de coordonnées calculées en x et en x'. En particulier, JT ne dépend que de $|x|$ et $|x'|$; il est <1 si et seulement si $|x| < |x'|$; on écrira: $JT(|x|,|x'|)$. Du principe de la composition du jacobien résulte l'implication:

$$|x_1| < |x_2| < |x'_2| < |x_1| \quad \Rightarrow \quad JT(|x_1|,|x'_1|) < JT(|x_2|,|x'_2|) \quad ;$$

autrement dit, en amplifiant, à droite et à gauche, l'intervalle $(|x_1|,|x'_1|)$, on accentue l'écart de JT à 1. De plus, quel que soit $|x|<1$, $JT(|x|,|x'|)$ tend vers 0 quand $|x'|$ tend vers 1. Dans la suite, on considérera plutôt JTh(X, X') comme une fonction des $X=\mathrm{argth}(|x|)$.

2.3 Raccordement de mesures

On mettra le présent § en parallèle avec le §8, intitulé *Raccordement de deux convexes*, de l'article [FORME PROJ.].

Étant donnée une loi μ dont le support est une partie compacte de la boule K (éventuellement, le support peut être K), on définit la réduction μ' de μ à un intervalle (a, b) strictement inclus dans (-1, +1): μ' comprend, d'une part, la restriction de μ à la tranche $x \in (a, b)$ de la sphère; et d'autre part, les masses d'abscisse respectivement < a ou > b, sont transportées sur les disques x=a et x=b, le long de ellipses considérées ci-dessus. Il est clair que, μ étant fixé, on peut, en choisissant (a, b) assez large, obtenir que la distance $\partial m(\mu, \mu')$ soit aussi petite qu'on le veut.

Supposons données deux mesures, μ_1 et μ_2, dont on considère les réductions μ'_1 et μ'_2 à des tranches, $(-\Delta_1, +\Delta_1)$ et $(-\Delta_2, +\Delta_2)$. Afin d'obtenir une mesure μ'', qui, par une transformation projective convenable, puisse être rendue proche soit de μ_1 soit de μ_2, on fait la somme de mesures:

$$\mu''_1 = \mu'_1 + T(M).\mu'_2;$$

où T(M) est une translation hyperbolique; il est clair qu'on a:

$$\mu''_2 = T(-M).\mu''_1 = T(-M).\mu'_1 + \mu'_2;$$

les mesures μ'' résoudront le problème posé, si les parties complémentaires, $T(M).\mu'_2$ et $T(-M).\mu'_1$, ont une masse négligeable selon l'ordre d'approximation cherché.

En général, étant donnée une suite de mesures $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots\}$ on définit un schéma de raccordement:

$$(X_1-\Delta_1, X_1+\Delta_1)\ (X_2-\Delta_2, X_2+\Delta_2) \ldots (X_n-\Delta_n, X_n+\Delta_n) \ldots ;$$

lequel doit être compris comme suit.

À chaque mesure μ_n est associée sa réduction μ'_n à la tranche $(-\Delta_n, +\Delta_n)$; et on considère la somme:

$$\mu''(0) = \Sigma\, T(X_n).\mu'_n ;$$

et, plus généralement, pour M quelconque, la somme

$$\mu''(M) = \Sigma\, T(X_n+M).\mu'_n ;$$

en particulier, on note; $\mu''_n = \mu''(-X_n)$.

Il est clair que les μ''_n sont tous des transformés de $\mu''(0)$ par translation hyperbolique; donc, *a fortiori*, par transformation projective. En bref, si la suite $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots\}$ est partout dense dans L(K), et que, pour tout n, μ''_n est proche de μ_n, $\mu''(0)$ sera une mesure de forme générique. On se demandera donc sous quelles conditions μ''_n est proche de μ_n.

Il faut d'abord que μ'n soit proche de μ_n: ce qu'on obtiendra en prenant Δ_n assez grand. Il faut ensuite que soit négligeable la somme des masses des mesures $T(X_p-X_n).\mu'_p$, pour $p \neq n$. Ce qui nous ramène à l'effet de réduction de la masse par le jacobien JT.

2.4 Choix d'un schéma de raccordement

La suite $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots\}$ étant donnée, on choisit d'abord une suite croissante $\{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots\}$, telle que, pour $n \to \infty$, tende vers 0 la suite des distances $\partial m(\mu_n, \mu'_n)$. On construit ensuite la suite $\{X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots\}$, comme une suite croissante à partir de X_1, pris, arbitrairement, nul; en s'assurant de l'effet du jacobien JT.

De façon précise, X_{n-1} étant déjà fixé, on choisit X_n tel que:

$$\mathrm{JTh}(\Delta_n, X_n - (X_{n-1} + \Delta_n)) < 1/n^2 ;$$

d'après cette formule, il faut d'abord que $\Delta_n < X_n - (\Delta_n - X_{n-1})$; (i.é. que l'intervalle (X_{n-1}, X_n) soit supérieur à $2.\Delta_n$, largeur de la tranche n); et ensuite que JTh soit $< 1/n^2$; ce qui est réalisable, car, $\{X_{n-1}\ \Delta_n\}$ étant fixés, JTh tend vers 0 quand X_n tend vers l'infini.

Reste à apprécier l'effet des conditions demandées. Pour n donné, il y a, dans la somme $\mu''_n = \mu''(-X_n)$, outre le terme $\mu'n$ (de masse 1) dont on prétend qu'il soit la partie principale, deux blocs de termes $T(X_p-X_n).\mu'_p$: (n-1) termes de rang p=1 à p=n-1; et un infinité de termes p=n+1, n+2 ... ∞. Il apparaîtra que la masse totale de chacun de ces deux blocs est $<1/n$.

Pour p=n+1, μ'_p s'étend sur $(-\Delta_{n+1}, +\Delta_{n+1})$; et son image par $T(X_{n+1}-X_n)$, sur:

$$((X_{n+1} - X_n) - \Delta_{n+1}\ ,\ (X_{n+1} - X_n) + \Delta_{n+1})\ ;$$

donc $|X|$ passe d'une valeur absolue $\leq \Delta n+1$ à une valeur absolue

$$\geq ((X_{n+1} - X_n) - \Delta_{n+1});$$

d'où selon la condition imposée, $JT \leq 1/((n+1)^2)$.

Pour le terme en p=n+h, on a, de même, le passage vers la droite:

$$(-\Delta_{n+h}\ , +\Delta_{n+h}) \rightarrow ((X_{n+h} - X_n) - \Delta_{n+h}\ , (X_{n+h} - X_n) + \Delta_{n+h})\ ;$$

donc $|X|$ passe de $\leq\Delta_{n+h}$ à :

$$\geq ((X_{n+h} - X_n) - \Delta_{n+h}) \geq ((X_{n+h} - X_{n+h-1}) - \Delta_{n+h})\ ;$$

d'où $JT \leq 1/((n+h)^2)$. D'où pour la somme:

$$\begin{aligned}&\Sigma\{\text{masse}(T(X_p-X_n).\mu'_p) \mid p = n+1, n+2, \dots \infty\}\\ &\quad \leq \Sigma\{1/((n+h)^2) \mid h=1\dots\}\ \leq\ 1/n\ .\end{aligned}$$

Pour les termes de rang $p < n$, on a le passage vers la gauche:

$$(-\Delta_{n-h}, +\Delta_{n-h}) \rightarrow ((X_{n-h} - X_n) - \Delta_{n-h}, (X_{n-h} - X_n) + \Delta_{n-h})\ ;$$

donc $|X|$ passe de $\leq\Delta_{n-h} \leq \Delta_n$ à :

$$\geq ((X_n - X_{n-h}) - \Delta_{n-h}) \geq ((X_n - X_{n-1}) - \Delta_n)\ ;$$

d'où $JT \leq 1/n^2$; et, pour les (n-1) termes, une somme des masses $\leq 1/n$. CQFD.

2.5 Construction d'une mesure positive de forme générique

Au §1.5, ayant choisi, arbitrairement, une suite $\{eps_1, eps_2,\dots eps_u,\dots\}$ de valeurs de eps tendant vers 0, on a construit des $L_u=L(eps_u)$, ensembles finis de lois à support fini, $N(eps_u)$; de telle sorte que, pour toute loi μ de support quelconque (non nécessairement fini) sur K, existe, dans chacun des $L(eps_u)$ une approximation μ'_u, avec $\partial m(\mu,\mu'_u) \leq 2.eps_u$.

En mettant bout à bout les L_u, on a une suite $\{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n, ...\}$ de lois; il apparaît qu'en construisant pour cette suite un schéma de raccordement satisfaisant aux conditions du §2.4, on obtient une mesure positive, $\mu''(0)$, de forme générique.

En bref, on sait déjà que, pour une loi μ, laquelle, dans la suite du raisonnement, est supposée fixée, on peut trouver μ_n (notée ci-dessus μ'_u) arbitrairement proche de μ; il reste à montrer qu'on peut imposer la condition supplémentaire que μ''_n soit arbitrairement proche de μ_n.

Pour fixer les notations, prenons eps, arbitrairement petit: on va trouver n tel que soit inférieure à 5.eps la distance entre lois $\partial m(\mu, £\mu''_n)$; où $£\mu''_n$ désigne la loi obtenue en divisant μ''_n par sa masse totale.

Soit u_0 tel que $eps_{u_0} < eps$; on a, dans chaque bloc L_u de rang $u \geq u_0$, une loi μn telle que $\partial m(\mu, \mu_n) < 2.eps$. Compte tenu du choix déjà fait des Δ_n, on peut en trouver $u_1 \geq u_0$, tel, pour toute loi μ_n d'un bloc L_u, de rang $u \geq u1$, on ait $\partial m(\mu_n, \mu'_n) \leq eps$; donc, dans tout bloc L_u de rang $u \geq u_1$, existe une loi μn telle que $\partial m(\mu, \mu'_n) \leq 3.eps$.

Maintenant, on peut trouver $u_2 \geq u_1$ tel que les lois de tout bloc L_u, de rang $u \geq u_2$, aient, dans la suite infinie des $\{\mu_n\}$, un rang n tel que $2/n \leq eps$. Donc, dans tout bloc de rang $u \geq u_2$, existe une loi μ_n telle que, d'une part, $\partial m(\mu, \mu'_n) \leq 3.eps$; et, d'autre part, la mesure μ''_n ne diffère de la loi μ'_n que par l'adjonction d'une mesure positive μ^+_n de masse totale $\partial\partial \leq (2/n) \leq eps$.

Il ne reste plus qu'à considérer la distance, $\partial m(\mu'_n, £\mu''_n)$, entre μ'_n et la loi $£\mu''_n$ obtenue en divisant μ''_n par $(1+\partial\partial)$. Dans $£\mu''n$, est contenue la mesure positive $(1/(1+\partial\partial)).\mu'_n$, qui n'apporte aucune contribution à la distance $\partial m(\mu'_n, £\mu''_n)$; quant à $(1/(1+\partial\partial)).\mu^+_n$, elle a une masse ≤eps, et ne peut donc apporter à $\partial m(\mu'_n, £\mu''_n)$ une contribution supérieur à 2.eps (2 étant le diamètre de la boule K où sont distribuées les masses). On a donc:

$$\partial m(\mu, \mu'_n) \leq 3.eps \;;\; \partial m(\mu'_n, £\mu''_n) \leq 2.eps \;;\; \partial m(\mu, £\mu''_n) \leq 5.eps \;;$$

CQFD.

On a démontré que la mesure positive $\mu''(0)$ possède le caractère générique; dans la démonstration, seule a été considérée la suite des lois $£\mu''_n$, qui est partout dense dans L(K); par une translation hyperbolique, ou, plus généralement, un automorphisme projectif quelconque de la boule K, on obtiendrait une infinité d'autres mesures positives, donc d'autres lois; considérer celles-ci n'ôte ni n'ajoute rien au caractère générique de la mesure positive construite.

Il importe seulement noter ici que la définition posée au §0 pour la transformation projective des mesures, en tenant compte du Jacobien, s'applique, dans le cas de mesures portées par la boule unité et de tout automorphisme projectif, πr, de cette boule, parce que, pour un tel automorphisme, le Jacobien est borné sur la boule. Car, en bref, la fonction linéaire T, dénominateur des quotients définissant les coordonnées transformées par πr, ne peut s'annuler en un point M de la boule (même sur la sphère qui en est la frontière) sans que ne tende vers l'infini l'image $\pi r(M')$ d'un point M' tendant vers M tangentiellement à l'hyperplan d'équation T=0.

3 Conclusion: forme euclidienne et forme projective

En analyse des données multidimensionnelles, on considère des nuages de points munis de masse, représentant des lois. Du point de vue de la géométrie euclidienne, un tel nuage a une forme déterminée que l'analyse décrit, en la rapportant aux axes factoriel.

On voit qu'en géométrie projective il n'y a pas de tels invariants de forme; un objet unique, dit générique, peut, même, en un certain sens, revêtir toutes les formes possibles.

Référence bibliographique

M. Ouassou, Sagombaye Nodjiram : "Sur la classification des formes compactes en géométrie projective", [FORME PROJ.], in *CAD*, Vol.XIX, n°2 pp. 217-228; (1994).