

**REPRÉSENTATION D'UN ENSEMBLE I
MUNI DE MASSES ET DISTANCES
PAR LE NUAGE, $N(I)$,
ASSOCIÉ À UN TABLEAU DE CORRESPONDANCE**

[REPR. ENS. CORR.]

A. M. ALKAYAR*

0 Position du problème

Les résultats démontrés dans la présente note sont des contributions à la solution d'un problème général que nous considérerons d'abord.

On sait qu'à un ensemble I muni de distances $d(i, i')$ est associé, sous des conditions assez générales, une représentation par un ensemble de points $\{M^i \mid i \in I\}$ d'un espace euclidien, entre lesquels les distances sont les $d(i, i')$. Plus précisément, le système de distances peut toujours être réalisé dans un espace muni d'une forme quadratique; mais la solution n'est euclidienne que si la forme quadratique ne comporte pas de carré affecté du signe négatif.

[Cette éventualité n'est pas exceptionnelle mais se réalise sur l'exemple très simple suivant: $I = \{O, A, B, C\}$; $d(A, B) = d(B, C) = d(C, A) = \sqrt{3}$; $d(O, A) = d(O, B) = d(O, C) = r$; avec $r \in]\sqrt{3}/2, 1[$; la condition $\sqrt{3}/2 < r$ étant posée pour que soit satisfaite l'inégalité du triangle; et la condition $r < 1$ pour que n'existe pas de représentation euclidienne proprement dite].

Si l'ensemble I est muni non seulement de distances, $d(i, i')$, mais aussi de masses, m_i , on a, dans la représentation euclidienne, un système d'axes principaux d'inertie; les coordonnées sur ces axes étant les facteurs associés univoquement à l'ensemble I donné, muni de masses et distances. Désormais, on écrira $\{I, m_I, d^{II}\}$ le triple constitué par l'ensemble I , la mesure m_I sur I , et la fonction de distance d^{II} .

Au lieu d'une représentation euclidienne pour $\{I, m_I, d^{II}\}$, on peut, plus précisément, chercher une représentation du triple par le nuage $N(I)$ associé à un tableau de correspondance convenable, $k(I \times J)$: nous dirons alors, en bref, qu'il existe une représentation du triple par un nuage $N(I)$; ou: par $N(I)$.

(*) Université Pierre et Marie Curie et جامعة بغداد.

Il est clair que le triple doit être normalisé, en posant que la somme des m_i est 1; autrement dit, que m_i est une loi de probabilité sur I . De plus, il faut que les moments principaux d'inertie du triple soient compris entre 0 et 1. Ces conditions, toutefois, ne sont pas suffisantes. Nous obtenons seulement ici des résultats partiels quant aux conditions nécessaires et suffisantes.

Au §1, on démontre que, pour toute suite $\{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \dots \geq \lambda_{n-1}\}$, de $(n-1)$ nombres de l'intervalle semi-ouvert $]0, 1]$, il existe un tableau de correspondance symétrique, $n \times n$, dont la suite des valeurs propres non triviales est la suite donnée.

Au §2, on traite complètement le cas où la représentation euclidienne du triple est unidimensionnelle, $\{F(i) \mid i \in I\}$: avec une seule coordonnée réelle, F , de moyenne nulle. Alors la condition d'existence d'une représentation par un nuage $N(I)$ dépend seulement du maximum (positif) de $F(i)$ et de son minimum (négatif); et s'il existe une représentation par $N(I)$, on peut imposer que $\text{card}J = 2$; autrement dit, que $k(I \times J)$ soit un tableau à deux colonnes.

Au §3, le cas d'un triple multidimensionnel est réduit à un problème de géométrie dont l'énoncé est simple; mais dont nous ne connaissons pas de solution complète.

1 Existence d'un nuage $N(I)$ avec une suite quelconque de valeurs propres entre 0 et 1

La question posée ici se résoud facilement à partir de résultats connus, publiés notamment dans : *Pratique de l'Analyse des Données*, Vol.II, IV, [SYM. & BLOCS], nos 0, 11, 12; que nous citerons [SYM. & BLOCS]. On procède en trois pas.

1.1 Cas de la valeur propre 1

Éliminons d'abord le cas de la valeur propre 1, quelle qu'en soit la multiplicité, p . Soit la suite, de longueur $m-1$:

$$\{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \dots = \lambda_p > \lambda_{p+1} \geq \dots \geq \lambda_{m-1}\} ;$$

où $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 1$; et $m = p+n$. Si l'on a un tableau symétrique S , $n \times n$, dont la suite des valeurs propres est:

$$\{\lambda_{p+1} \geq \dots \geq \lambda_{m-1}\} ;$$

on a un tableau T afférent à la suite de longueur $m-1$. Le tableau T , $m \times m$, est composé de $p+1$ blocs diagonaux; dont les p premiers sont réduits à une case contenant le nombre 1; et le dernier est le tableau $n \times n$.

Reste le cas d'une suite de $n-1$ valeurs propres comprises dans l'intervalle ouvert $]0, 1[$. On procédera par récurrence sur n ; à partir du cas $n=2$.

1.2 Le cas $n=2$, où il y a une seule valeur propre

Si la valeur propre imposée est dans $]0, 1[$, on peut trouver un tableau 2×2 satisfaisant. De façon précise, en vue de préparer les §§1.3 et 2, nous décrivons complètement l'analyse du tableau symétrique 2×2 le plus général, ayant un facteur direct (i.e., à diagonale prédominante). Pour la suite, il est commode de prendre comme paramètres les masses, $\{u, v\}$, des deux éléments; ou les valeurs, $\{x, y\}$, des facteurs, avec $0 < x$. On note:

$$I = \{1, 2\} ; k(1) = u ; k(2) = v ; u + v = 1 ;$$

$$0 < F(1) = x = r.v ; F(2) = y = -r.u < 0 ; r = x - y = |x| + |y| ;$$

la valeur propre est λ :

$$\lambda = u.x^2 + v.y^2 = r^2.u.v = -x.y ;$$

le tableau des $k(i, i')$ est donné par:

$$k(1, 1) = u^2.(1 + \sqrt{(1/\lambda)}.F(1)^2) = u^2.(1 + r.\sqrt{(1/u.v).v^2}) ;$$

$$k(1, 2) = k(2, 1) = u.v.(1 + \sqrt{(1/\lambda)}.F(1).F(2)) = u.v.(1 - \sqrt{(-xy)}) ;$$

$$k(2, 2) = v^2.(1 + \sqrt{(1/\lambda)}.F(2)^2) = v^2.(1 + r.\sqrt{(1/u.v).u^2}) .$$

Il est clair que si $-x.y \leq 1$, on a un tableau de correspondance dont le terme extradiagonal est ≥ 0 ; et, qu'étant donnés $\{u, v, \lambda\}$, on peut déterminer un r convenable.

1.3 Récurrence sur le nombre des valeurs propres imposées

Dans le n°12 de [SYM. & BLOCS], on analyse un cas modèle général de tableau obtenu par "Juxtaposition de blocs diagonaux avec blocs latéraux simplifiés". Nous décrivons un modèle particulier qui suffit pour la récurrence.

Soit S un tableau symétrique $n \times n$, ayant la suite de valeurs propres:

$$\{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \dots \geq \lambda_{n-1}\} ;$$

et k , un tableau 2×2 , construit comme au §1.2, avec les paramètres $\{u, v, \lambda\}$; on définit un tableau symétrique T , $(n+1) \times (n+1)$, par les formules suivantes (où $S(i)$ désigne la marge du tableau S):

$$\forall i, i' \in [1, n] : T(i, i') = k(1, 1) . S(i, i') ;$$

$$\forall i \in [1, n] : T(i, n+1) = T(n+1, i) = k(1, 2) . S(i) ;$$

$$T(n+1, n+1) = k(2, 2) ;$$

alors, T admet d'une part la valeur propre λ ; et d'autre part, la suite des $n-1$ valeurs propres:

$$\{\lambda'_1 \geq \lambda'_2 \geq \lambda'_3 \dots \geq \lambda'_{n-1}\} \quad ;$$

où $\lambda'_h = \mu \cdot \lambda_h$; $\mu = (k(1, 1) / u)^2 > u^2$.

De façon précise le facteur F_n , relatif à la valeur propre λ , vaut x sur le bloc $[1, n]$ et y pour $i=n+1$; et le facteur F_h , relatif à λ'_h , vaut 0 pour $i=n+1$, et coïncide, à un coefficient de normalisation près, sur le bloc $[1, n]$, avec le facteur issu de S relatif à la valeur propre λ_h .

La construction de récurrence procédera donc comme suit.

a) Choix d'un nombre u dans $]0, 1[$, tel que $(1/u^2) \cdot \lambda_1 < 1$.

b) Construction du tableau k , 2×2 , avec le u choisi, $v=1-u$, et $\lambda = \lambda_n$, valeur imposée. Du choix de u , il résulte, *a fortiori*, que $(1/\mu) \cdot \lambda_1 < 1$.

c) Construction du tableau S , $n \times n$, ayant les valeurs propres:

$$\{\lambda''_1 \geq \lambda''_2 \geq \lambda''_3 \dots \geq \lambda''_{n-1}\} \quad ;$$

où $\lambda''_h = (1/\mu) \cdot \lambda_h$, les λ_h étant imposées.

d) Composition de T , à partir de S et du tableau carré k , comme on l'a expliqué ci-dessus.

Il est clair que ce tableau symétrique T , $(n+1) \times (n+1)$, a la suite de valeurs propres demandée.

2 Représentation, par un nuage $N(I)$, d'un ensemble I de dimension 1

Soit I un ensemble muni d'un système de masses m_i , dont le total est 1; avec des distances $d(i, i')$ telles qu'on puisse les représenter sur un axe; où nous supposons que l'origine coïncide avec le centre de gravité de I , la coordonnées de i étant notée $F(i)$.

Au triple $\{I, m_I, d^I\}$ on associe des entités $\{i_1, i_2, x, y, u, v\}$ définies comme suit:

i_1 : un élément de I tel que:

$$0 < F(i_1) = x = \text{Sup}\{F(i) \mid i \in I\} \quad ;$$

i_2 : un élément de I où est réalisé le minimum $y < 0$;

$$u = |y| / (|x| + |y|) \quad ; \quad v = |x| / (|x| + |y|) = 1 - u \quad ;$$

avec ces notations, l'origine 0 est le barycentre de $\{F(i_1), F(i_2)\}$, munis des masses $\{u, v\}$. Et l'on peut considérer un triple très simple, rentrant dans le modèle du §1.2, avec $I^0 = \{1, 2\}$; les masses u et v ; et la distance $d(1, 2) = d(i_1, i_2)$ donnée avec I . Nous parlerons, en bref, du triple I^0 et du triple I .

Ceci étant fixé, la condition nécessaire et suffisante pour que le triple I puisse être représenté par un nuage $N(I)$ est que soit ≤ 1 le produit $-x.y$ du maximum (x , positif) de $F(i)$ par la valeur absolue de son minimum (y , négatif); et l'on peut alors imposer que le tableau de correspondance d'où vient le nuage $N(I)$ soit un tableau à deux colonnes.

La démonstration repose sur la construction suivante.

Soit $i \in I$: il existe deux nombres positifs $m_1(i)$ et $m_2(i)$ tels que: $m_i = m_1(i) + m_2(i)$; et $F(i)$ est le barycentre de $F(i_1)$ et $F(i_2)$ munis des masses $m_1(i)$ et $m_2(i)$. Nous dirons que i est ainsi éclaté sur $\{i_1, i_2\}$.

L'éclatement s'applique, en particulier, à i_1 et i_2 , si l'on pose:

$$m_1(i_1) = m_{i_1} ; \quad m_2(i_1) = 0 \quad ;$$

et, de même:

$$m_1(i_2) = 0 \quad ; \quad m_2(i_2) = m_{i_2} .$$

De l'associativité du calcul barycentrique il résulte qu'on a:

$$m_1 = \sum\{m_1(i) \mid i \in I\} = u \quad ; \quad m_2 = \sum\{m_2(i) \mid i \in I\} = v \quad ;$$

l'origine étant, comme on l'a posé, le barycentre de $\{F(i_1), F(i_2)\}$, munis des masses $\{u, v\}$.

Il est clair maintenant que l'existence d'une représentation du triple I° par $N(I^\circ)$, associé à un tableau $I^\circ \times J$ équivaut à l'existence d'une représentation du triple I par $N(I)$, associé à un tableau $I \times J$; avec, pour les deux tableaux, le même J et la même loi marginale sur J .

En effet si l'on a un tableau $I^\circ \times J$ convenable, on en déduit un tableau $I \times J$; où chaque ligne i n'est autre que la combinaison des lignes i_1 et i_2 du tableau $I^\circ \times J$, avec les coefficients $m_1(i)$ et $m_2(i)$. Et réciproquement, un tableau $I \times J$ étant donné, on construit $I^\circ \times J$ par éclatement des lignes de $I \times J$: i.e. un tableau où les lignes 1 et 2 sont données par:

$$T(i_1, j) = \sum\{m_1(i).T(i, j) \mid i \in I\} ; \quad T(i_2, j) = \sum\{m_2(i).T(i, j) \mid i \in I\} .$$

De plus, s'il y a une représentation $I^\circ \times J$ pour $N(I^\circ)$, c'est que l'inertie sur l'axe unique, qui n'est autre que $-x.y$, est ≤ 1 ; et alors on peut construire cette représentation avec un tableau 2×2 ; d'où une représentation par un tableau à deux colonnes pour I également.

Ce qui achève de démontrer nos assertions.

3 Recherche d'une représentation par un nuage $N(I)$ pour un triple multidimensionnel

Considérons un triple $\{I, m_I, d^{II}\}$, qui admet une représentation euclidienne en dimension p ; soit $\{\lambda_h \mid h = 1 \dots p\}$ les p moments principaux d'inertie et $F_h(i)$ la coordonnées du point i sur l'axe principal d'inertie de rang h ; l'origine étant au centre de gravité du nuage.

On peut, par analogie avec le §2, noter, vectoriellement:

$$F(i) = \{F_1(i), \dots, F_h(i), \dots, F_p(i)\}.$$

3.1 Expression du tableau de correspondance cherché par la formule de reconstitution des données

Pour chercher un tableau de correspondance T , sur un produit $I \times J$, tel que le nuage $N(I)$ représente le triple donné, nous partirons de la formule de reconstitution des données en fonction des facteurs:

$$T(i, j) = m_i \cdot m_j \cdot (1 + \sum \{\sqrt{(1/\lambda_h)} \cdot F_h(i) \cdot F_h(j) \mid h = 1 \dots p\}) ;$$

Dans cette formule sont présentement indéterminés l'ensemble J , les masses m_j attribuées à ses éléments ; et les facteurs F_h sur J .

Afin de simplifier les conditions à imposer aux inconnues, nous récrivons cette formule avec, sur J , des facteur φ_h de variance 1. Il vient:

$$T(i, j) = m_i \cdot m_j \cdot (1 + \sum \{F_h(i) \cdot \varphi_h(j) \mid h = 1 \dots p\}) .$$

Ainsi, les entités inconnues sont d'une part, l'ensemble J muni de la loi de probabilité m_j , et d'autre part, le système des p fonctions φ_h^J , de moyenne nulle et orthonormées pour la loi m_j .

Ceci dit, la seule condition à imposer pour obtenir un nuage $N(I)$ qui représente le triple donné sur I , est que T soit un véritable tableau de correspondance, i.e. ne contienne aucun terme $k(i, j)$ négatif.

Il importe de rappeler que cette condition est certainement réalisée, si, ayant pris, sans aucune restriction, un ensemble J de cardinal $p+1$ avec une loi m_j et un système orthonormé de p fonctions φ_h^J , on substitue au triple $\{I, m_I, d^{II}\}$, donné, une figure homothétique dans un rapport μ suffisamment petit pour que la formule de reconstitution n'introduise pas de valeur, $k(i, j)$, négative.

La condition d'existence de $N(I)$ n'impose donc de restriction qu'à la taille du triple, non à la forme de celui-ci.

3.2 Simplification du nuage I par éclatement sur la frontière de l'enveloppe convexe

Bien que cela ne soit pas indispensable pour notre exposé, on peut, comme au §2, utiliser la procédure d'éclatement; en adaptant celle-ci au cas multidimensionnel.

Au §2, l'ensemble I est étalé sur une droite, entre ses deux extrémités, i_1 et i_2 . Ici, dans un espace de dimension p, l'analogie de l'ensemble $\{i_1, i_2\}$ est l'ensemble I° des sommets de l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{F(i) \mid i \in I\}$, dans l'espace euclidien R^p . À tout i, on peut associer un système de nombres positifs, $\{\mu_i(i^\circ) \mid i^\circ \in I^\circ\}$, tels que:

$$\sum\{\mu_i(i^\circ) \mid i^\circ \in I^\circ\} = m_i \quad ; \quad \sum\{\mu_i(i^\circ).F(i^\circ) \mid i^\circ \in I^\circ\} = m_i.F(i) \quad ;$$

(le choix des $\mu_i(i^\circ)$ n'étant unique que si I° est un simplexe à p+1 sommets).

Si, par analogie avec le §2, on pose:

$$u_{I^\circ} = \sum\{\mu_i(i^\circ) \mid i \in I\} \quad ;$$

on a, dans R^p , la représentation euclidienne d'un triple $\{I^\circ, u_{I^\circ}, d^{I^\circ}\}$, avec l'ensemble des points $F(i^\circ)$, déjà en place; le centre de gravité étant à l'origine.

Par la même voie qu'au §2, on montre que l'existence d'une représentation du triple I° par $N(I^\circ)$, associé à un tableau $I^\circ \times J$ équivaut à l'existence d'une représentation du triple I par $N(I)$, associé à un tableau $I \times J$; avec, pour les deux tableaux, le même J et la même loi marginale sur J.

Désormais, pour simplifier la figure que nous avons en vue, on peut supposer que $I=I^\circ$; i.e. que, dans R^p , les $F(i)$ sont les sommets d'un polyèdre convexe; le centre de gravité de l'ensemble des sommets étant à l'origine.

3.3 Conditions pour l'ensemble $\varphi(J)$ dans l'espace R^p

En termes géométriques, les conditions posées au §3.1, relativement à l'inertie, se traduisent: on cherche dans R^p , un ensemble de points $\varphi(j)$, ou nuage $\varphi(J)$ de masse totale 1; dont le centre de gravité est à l'origine; et tous les moments principaux d'inertie sont égaux à 1; i.e. qui a même inertie qu'une masse 1, distribuée uniformément sur l'hypersphère de rayon \sqrt{p} , centrée à l'origine; le rayon étant choisi pour que l'inertie totale soit p.

Restent à traduire les conditions de positivité. Nous écrivons (en notant \langle, \rangle le produit scalaire):

$$\forall i \in I, \forall j \in J : \langle -F(i), \varphi(j) \rangle \leq 1 \quad ;$$

ce qu'on énoncera:

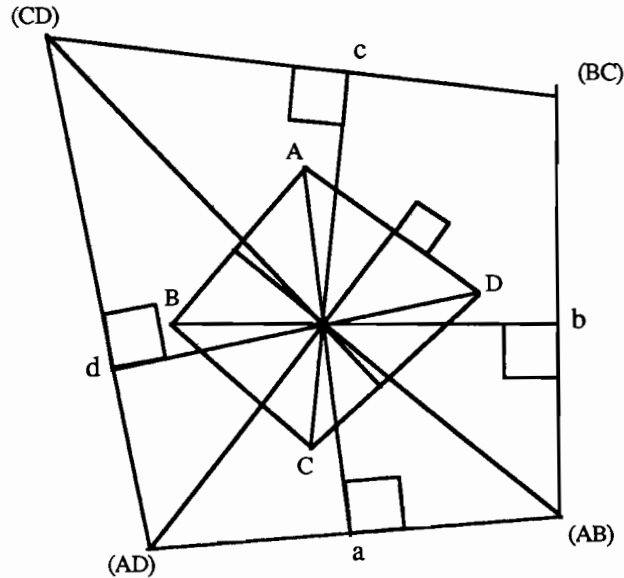


Schéma de la transformation par polaires réciproques dans le cas d'une figure plane, $p = 2$. L'ensemble des points $F(i)$ est un quadrilatère $\{A, B, C, D\}$. Le domaine $P(I)$ est également un quadrilatère, dont les sommets sont marqués $\{(AB) (BC) (CD) (AD)\}$. La polaire du point A n'est autre que la droite $\{(AB) a (AD)\}$: les points $\{A, a\}$ s'opposent, de part et d'autre de l'origine O (non marquée), et le produit des distances $|OA| \cdot |Oa|$ est 1. De même, pour B, C, D , la polaire est une droite respectivement perpendiculaire à Bb, Cc, Dd au point $b, c, ou d$. Les sommets de $P(I)$ sont, par réciprocité, les pôles des côtés du quadrilatère $\{A, B, C, D\}$; et c'est pourquoi, e.g., on a marqué (AD) le pôle de la droite joignant les points A et D ; etc.

chacun des points du nuage $\varphi(J)$ est dans le polyèdre convexe contenant l'origine et délimité par les cardI hyperplans d'équation:

$$\langle -F(i), \varphi(j) \rangle \leq 1.$$

Ce polyèdre, $P(I)$, étant encore appelé: figure polaire, par rapport à l'hypersphère de rayon 1 centrée à l'origine, du symétrique de l'enveloppe convexe de I .

La question est finalement: le polyèdre $P(I)$ est-il assez large pour qu'on y trouve un polyèdre $\varphi(J)$ ayant l'inertie de l'hypersphère de masse 1 et rayon \sqrt{p} , centrée à l'origine.

Nous ne connaissons pas de condition nécessaire et suffisante générale pour l'existence de $\varphi(J)$; mais savons traiter des cas particuliers.

3.4 Construction d'un tableau $I \times J$ pour certains triples I

3.4.1 Exemple 1: le simplexe régulier I dont tous les moments d'inertie sont égaux à 1

On a $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 1$; $\text{card}I = p+1$; la distance de l'origine à l'un quelconque des sommets $F(i)$ est \sqrt{p} ; (puisque l'inertie totale est p). La distance de $F(i)$ à la face opposée du simplexe est donc $(\sqrt{p})/p = 1/\sqrt{p}$; et le polyèdre polaire $P(I)$ coïncide avec $F(I)$.

On doit poser $\varphi(J) \approx I$; ce qui correspond à un tableau $(p+1) \times (p+1)$ réduit à une diagonale constante; avec cette structure en blocs d'une simplicité radicale, il n'y a que des facteurs relatifs à la valeur propre 1.

3.4.2 Exemple 2: modèle continu de I ayant la symétrie sphérique

On suppose que I est un ensemble infini: on a, dans \mathbb{R}^p , une masse 1, distribuée uniformément sur l'hypersphère de rayon r , centrée à l'origine; (ou, plus généralement, cf. §3.2, une masse 1, distribuée avec la symétrie sphérique; le maximum de la distance à l'origine étant r).

Dans ce cas, l'ensemble polaire $P(I)$ n'est autre que la boule de rayon $(1/r)$. S'il existe un $\varphi(J)$ convenable, on peut par moyenne sur le groupe des rotations, se ramener au cas où $\varphi(J)$ a la symétrie sphérique: et il est clair que les conditions d'inertie imposent que $\sqrt{p} \leq (1/r)$; donc $r \leq 1/\sqrt{p}$.

Pour la distribution de masse $F(I)$, à la distance r de l'origine, les moments principaux d'inertie sont r^2/p ; donc, si $r = 1/\sqrt{p}$, on a $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = 1/p^2$.

Voici la correspondance sur $I \times J$ dans le cas le plus simple, $p=2$. On pose:

$$I = U = [0, 1] ; J = V = [0, 1] ;$$

avec la correspondance continue, décrite par la formule de reconstitution:

$$\begin{aligned} f_{I \times J} &= du.dv \cdot (1 + \sin(2\pi.u).\sin(2\pi.v) + \cos(2\pi.u).\cos(2\pi.v)) \\ &= du.dv \cdot (1 + \cos(2\pi.(u-v))) ; \end{aligned}$$

les facteurs normalisés, de variance 1, sont:

$$\begin{aligned} \varphi_1(u) &= \sqrt{2} \cdot \sin(2\pi.u) ; \varphi_2(u) = \sqrt{2} \cdot \cos(2\pi.u) ; \\ \varphi_1(v) &= \sqrt{2} \cdot \sin(2\pi.v) ; \varphi_2(v) = \sqrt{2} \cdot \cos(2\pi.v) ; \end{aligned}$$

on vérifie, sur la formule de reconstitution, que les deux valeurs propres sont égales à $1/p^2 = 1/4$.

4 Conclusion

Au problème posé ici et encore incomplètement résolu, on peut en associer d'autres, relatifs aux invariants géométriques introduits par l'analyse des données. Ainsi, à un ensemble euclidien muni de masses et distances, la CAH, avec pour critère l'agrégation suivant la variance, associe une arborescence et une suite de niveaux pour les nœuds. On peut se demander à quelles conditions doit satisfaire une arborescence, donnée avec ses niveaux, pour qu'existe un triple qui y conduise par la CAH. Les remarquables résultats obtenus par R. ROUSSEAU (cf., pour les plus récents, [REC. BLOC. IV]), laissent présumer que de telles conditions ne se peuvent énoncer simplement.

Références bibliographiques

Ch. BASTIN, etc.: [SYM. & BLOCS], in, *Pratique de l'Analyse des Données, 2; Abrégé théorique & études de cas modèle*; Dunod, Paris; (1980).

R. ROUSSEAU: [REC. BLOC. IV], "Reconnaissance de la structure de blocs d'un tableau de correspondance par la classification ascendante hiérarchique"; in *C.A.D.*, Vol XIX, n°3; (1994).