Les Cahiers de l'Analyse des Données
Vol. XX - 1995 - n°1 - pp. 111-120.

ANALYSE D'UN TABLEAU DE CORRESPONDANCE COMPORTANT DES NOMBRES NÉGATIFS: APPLICATION À L'ANALYSE D'UN SOUS-TABLEAU DE BURT GÉNÉRALISÉ

[CORR. NÉG]

*SAGOMBAYE NODJIRAM**

1 Nombres négatifs et modèle de l'analyse des correspondances

L'analyse des correspondances a été d'abord proposée pour des tableaux de contingence croisant deux ensembles I et J; notamment, en vue d'applications linguistiques, I étant un ensemble de textes, J un ensemble de mots et k(i, j) le nombre des occurrences du mot i dans le texte j. Plus généralement, on peut dire, en termes mathématiques, que l'objet de l'analyse est une loi de probabilité sur le produit de deux ensembles I et J.

Dans cette interprétation, les nombres k(i, j) sont nécessairement tous positifs ou nuls. Mais si l'on considère la suite des calculs, il apparaît que, sous certaines conditions, la présence de nombres négatifs n'empêche pas de déterminer des facteurs. Ici, nous considérerons, d'une part, au §2, un cas général, où moyennant des contraintes strictes sur les termes négatifs, l'analyse s'achève sans aucun obstacle; et, d'autre part, aux §§3 et 4, un cas particulier, où malgré des lignes entières de termes négatifs, on a des équations résolubles qui ont l'intérêt de retrouver les facteurs calculés sur un ensemble d'individus adjoint en supplément à l'analyse d'un sous-tableau de BURT généralisé.

2 Cas d'un tableau rectangulaire dont les marges sont positives

Rappelons les notations usuelles:

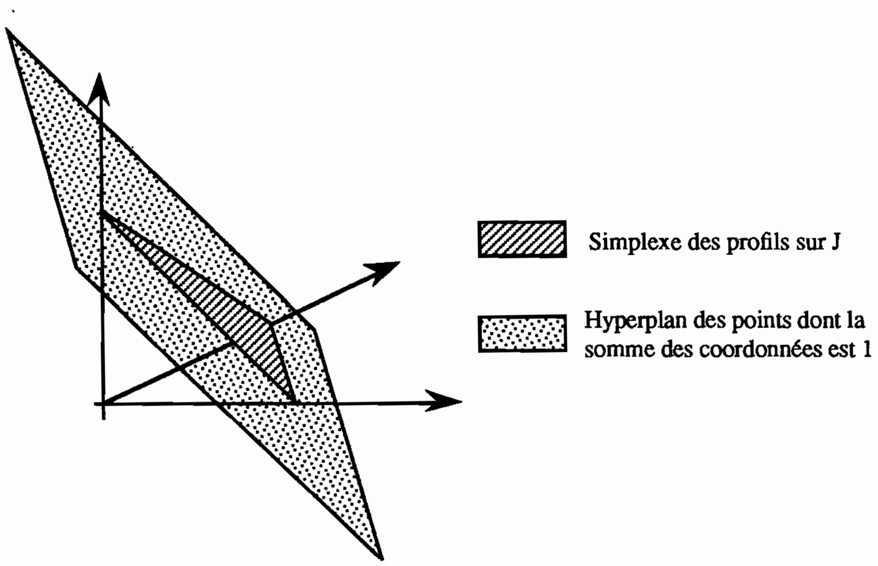
$$k(i) = \sum\{k(i, j) \mid j \in J\} \quad ; \quad k(j) = \sum\{k(i, j) \mid i \in I\} \quad ;$$

$$f_J{}^i = \{(k(i, j)/k(i)) \mid j \in J\} \quad ; \quad f_I{}^j = \{(k(i, j)/k(j)) \mid i \in I\} \quad ;$$

$$k = \sum\{k(i, j) \mid i \in I \,;\, j \in J\} \quad ; \quad f_i = k(i)/k \quad ; \quad f_j = k(j)/k \quad ;$$

$$N(I) = \{(f_J{}^i, f_i) \mid i \in I\} \quad ; \quad N(J) = \{(f_I{}^j, f_j) \mid j \in J\} \quad ;$$

(*) Étudiant en Doctorat à l'Université Pierre et Marie CURIE.



avec ces formules, on dit que N(I) est le nuage des profils, sur J, des lignes du tableau donné; chaque profil, $f_J{}^i$, étant affecté de la masse f_i; avec, pour distance entre profils, la distance du χ^2, de centre la loi marginale f_J sur J:

$$d^2(f_J{}^i, f_J{}^{i'}) = \Sigma\{(f_j{}^i - f_j{}^{i'})^2 / f_j \mid j \in J\} \quad ;$$

on retrouve ainsi, pour la recherche des axes factoriels, le problème de la recherche des axes principaux d'inertie pour un ensemble de points munis de masses et distances au sein d'un espace euclidien.

Or, pour retrouver ce problème classique, il n'est pas nécessaire que les points du nuage N(I) aient toutes leurs coordonnées positives, comme c'est le cas si $f_J{}^i$ est une loi de probabilité sur J; pourvu que les $f_j{}^i$ puissent être calculés sans rencontrer de division par zéro, on aura, en général, un point $f_J{}^i$ dont les coordonnées, non toutes positives, ont pour somme 1. De façon précise, il suffit que soient positives, d'une part, les masses f_i des points du nuage; et d'autre part, les coefficients f_j de la métrique du χ^2.

Il est clair que ces conditions sont réalisées si toute ligne du tableau, ainsi que toute colonne, a un total strictement positif.

On peut encore, dissymétriquement, faire référence au seul nuage N(I) et dire, en termes géométriques, que, dans R_J, tous les $f_J{}^i$ appartiennent (cf. figure) à l'hyperplan des points dont la somme des coordonnées est 1; ont une masse f_i positive; le centre de gravité f_J, du nuage N(I), étant à l'intérieur du simplexe des profils sur J.

En analyse des correspondances, on demande seulement, d'ordinaire, que tous les k(i, j) soient positifs ou nuls (et non *strictement* positifs); présentement, il ne suffit pas que les k(i) et k(j) soient tous positifs ou nuls: on a vu, en effet, qu'il fallait éviter les divisions par zéro. Mais, puisqu'une ligne ou une colonne identiquement nulle peut être éliminée du tableau, il suffit de demander que toute ligne ou colonne non identiquement nulle ait un total strictement positif.

3 Rappel: sous-tableau de BURT généralisé et calcul des facteurs pour les individus adjoints en supplément

Afin d'étudier les corrélations entre deux groupes de variables, l'usage s'est établi de passer par l'analyse d'un sous-tableau rectangulaire d'un tableau de BURT. Il est apparu récemment, (cf. [FACT. BURT. GÉN.], in *CAD*, Vol.XIX, n°4, 1994), que certaines propriétés des différents ensembles de facteurs que l'on considère dans cette méthode de comparaison peuvent être démontrées dans un cadre plus général que celui du codage disjonctif complet.

On se propose ici de calculer les deux systèmes de facteurs afférents à l'ensemble des individus, adjoints respectivement comme lignes et colonnes supplémentaires à l'analyse du sous-tableau rectangulaire généralisé, par l'analyse d'un seul tableau principal; mais où figurent toutefois des lignes de termes négatifs qui font sortir du format considéré au §2.

Dans ces conditions, on ne tentera pas de considérer un nuage de points munis de masses de signe quelconque dans un espace muni d'une forme quadratique hyperbolique; mais on vérifiera que ne rencontre pas d'obstacle le calcul des facteurs par double transition entre les ensembles en correspondance.

Rappelons (d'après [FACT. BURT. GÉN.]; à un *changement de notation* près, permutant k_a et k_b) le format des données requises pour calculer un sous-tableau rectangulaire de BURT généralisé. On part de deux tableaux $k_a(I, J_a)$ et $k_b(I, J_b)$ satisfaisant à la condition de proportionalité suivante:

$$\forall\, i \in I \;:\; k_a(i, J_a)/k_a \;=\; k_b(i, J_b)/k_b \quad ;$$

les quantités introduites étant définies ci-dessous par des sommes (où j_a désigne un élément arbitraire de J_a):

$$k_a(i, J_a) = \Sigma\{k_a(i, j_a) \mid j_a \in J_a\} \quad ;$$

$$k_a = \Sigma\{k_a(i, J_a) \mid i \in I\} = \Sigma\{k_a(i, j_a) \mid i \in I \,;\, j_a \in J_a\} \;;$$

et de même pour $k_b(i, J_b)$ et k_b, en remplaçant a par b. On note:

$$k(i) = k_a(i, J_a)/k_a = k_b(i, J_b)/k_b \quad ; \quad \Sigma\{k(i) \mid i \in I\} = 1 \quad ;$$

où k(i) tient le rôle d'une fréquence. Et, comme sous-rectangle de BURT généralisé, on définit le tableau $K(J_a \times J_b)$:

$$K(j_a, j_b) = \Sigma\{k_a(i, j_a).k_b(i, j_b) / (k_a.k_b.k(i)) \mid i \in I\} ;$$

dont les marges sur J_a et J_b sont respectivement données par:

$$K(j_a) = \Sigma\{k_a(i, j_a).k_b(i, j_b) / (k_a.k_b.k(i)) \mid i \in I ; j_b \in J_b\} = k_a(j_a)/k_a ;$$

et de même $K(j_b) = k_b(j_b)/k_b$. Dans le tableau K, on convient de dire que J_a et J_b sont, respectivement, l'ensemble des lignes et l'ensemble des colonnes. Ainsi, au tableau $J_a \times J_b$, l'ensemble I peut être adjoint en supplément de deux manières, comme un ensemble I_a de colonnes, par le tableau $k_a(I, J_a)$; et, par le tableau $k_b(I, J_b)$, comme un ensemble I_b de lignes.

À chacun des tableaux k_a et k_b sont associés deux transitions probabilistes; ces transitions étant suffisamment distinguées par les ensembles source et but, on peut les désigner comme suit:

$$k_{Ja}{}^{I} \quad ; \quad k_I{}^{Ja} \quad ; \quad k_{Jb}{}^{I} \quad ; \quad k_I{}^{Jb} \quad ;$$

par exemple, on a, de façon précise:

$$k_{Ja}{}^{I} = \{k_{ja}{}^{i} \mid i \in I ; j_a \in J_a\} \; ; \; k_{ja}{}^{i} = k_a(i, j_a)/k_a(j_a) \; .$$

De même, au rectangle de BURT, $K(J_a \times J_b)$, il correspond deux transitions:

$$K_{Ja}{}^{Jb} \quad ; \quad K_{Jb}{}^{Ja} \quad ;$$

qui s'expriment par composition à partir de celles associées à k_a et k_b:

$$K_{Ja}{}^{Jb} = k_{Ja}{}^{I} \circ k_I{}^{Jb} \quad ; \quad K_{Jb}{}^{Ja} = k_{Jb}{}^{I} \circ k_I{}^{Ja} \quad ;$$

et si $(\varphi^{Ja}, \varphi^{Jb})$ désigne un couple de facteurs associés de variance 1, extraits du rectangle K, on a, pour les facteurs sur les éléments supplémentaires:

$$G^I = \varphi^{Ja} \circ k_{Ja}{}^{I} \quad ; \quad F^I = \varphi^{Jb} \circ k_{Jb}{}^{I} \quad ;$$

où G et F sont les facteurs sur I adjoint respectivement à K en colonnes et lignes supplémentaires.

4 Analyse d'un tableau mettant en correspondance individus et variables et analyse du sous-tableau de BURT généralisé

On se propose de faire sortir de l'analyse d'un seul tableau, k_t, les facteurs sur J_a, J_b, I_a et I_b. À cette fin, on met en correspondance les deux ensembles:

$$I_t = I_a \cup I_b \cup I_c \quad ; \quad J = J_a \cup J_b ;$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \overbrace{\begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\quad}^{J_a} & \overbrace{\qquad\quad}^{J_b} \end{array}}^{J} \\
I_t \left\{ \begin{array}{l} I_a \\[4pt] I_b \\[4pt] I_c \end{array} \right. &
\begin{array}{|c|c|}
\hline
-1/2k_a & 0 \\
\hline
0 & -1/2k_b \\
\hline
k_a & k_b \\
\hline
\end{array}
\end{array}
$$

Schéma du tableau k_t : on a, comme dans la suite, supposé que $r = -1/2$;
$I \approx I_a \approx I_b \approx I_c$

le tableau $k_t(I_t \times J_b)$ comprend six blocs, dont deux sont nuls; chacun des quatre autres étant, à des coefficients près, l'un des tableaux donnés au départ:

$$
\begin{array}{lll}
k_t(I_a, J_a) = r \,.\, k_b \,.\, k_a(I, J_a) & ; \quad k_t(I_a, J_b) = 0 & ; \\
k_t(I_b, J_a) = 0 & ; \quad k_t(I_b, J_b) = r \,.\, k_a \,.\, k_b(I, J_b) & ; \\
k_t(I_c, J_a) = \quad k_b \,.\, k_a(I, J_a) & ; \quad k_t(I_c, J_b) = \quad k_a \,.\, k_b(I, J_b) & ;
\end{array}
$$

ce schéma semble assez naturel, en ce qu'il présente d'abord, avec les blocs de lignes I_a et I_b, les deux descriptions de base de l'ensemble I; et donne ensuite, avec I_c, le lien entre ces deux descriptions; mais, outre les totaux k_a et k_b qui ne servent qu'à donner même masse à tous les blocs non nuls, il faut, afin de retrouver effectivement les facteurs cherchés, introduire le coefficient r; et il se trouve que, selon nos calculs, ce coefficient est négatif.

Afin de simplifier l'écriture, on supposera désormais que $k_a = k_b = 1$; ce qui équivaut à diviser chaque bloc de données par son total, sans modifier le tableau de BURT généralisé sinon par un facteur constant; et n'a donc pas d'effet sur le calcul des facteurs. Avec cette convention, les deux blocs de colonne J_a et J_b, de J, ont même masse totale (1+r).

Un premier facteur en évidence est le facteur trivial constant et égal à 1 sur I_t et sur J.

Appliquons maintenant la transition de I_t vers J, associée au tableau k_t, à la fonction qui vaut +1 sur J_a et -1 sur J_b: on obtient sur I_t une fonction qui est constante sur chacun des blocs et vaut, repectivement, +1 sur I_a, -1 sur I_b et 0 sur I_c.

Par la transition de I_t vers J, on obtient la fonction qui vaut, sur J_a, (+r/(1+r)); et sur Jb, (-r/(1+r)). En effet, en bref, sur une colonne j_a du bloc J_a, une fraction (r/(1+r)) de la masse est dans le bloc de lignes I_a où la fonction à transporter vaut +1; et dans les autres blocs de lignes la fontion est nulle. On raisonne de même pour J_b.

On a ainsi, outre le facteur trivial constant et égal à 1, un facteur, relatif à la valeur propre (r/(1+r)), qui (à la normalisation près) vaut, d'une part, +1 sur J_a et -1 sur J_b; et, d'autre part, +1 sur I_a, -1 sur I_b, 0 sur I_c. Donc, en vertu de l'orthogonalité des facteurs, tout autre facteur sur J doit avoir moyenne nulle à la fois sur J_a et sur J_b (chacun étant muni de sa loi marginale). C'est d'après cette remarque qu'on poursuit l'analyse factorielle.

Soit donc une fonction φ^J sur J dont la suite des valeurs comprend deux blocs φ^{Ja} et φ^{Jb}, dont chacun est de moyenne nulle. Cherchons son image par la transition de J vers I_t associée au tableau k_t. Sur I_a, on a l'image, ψ^{Ia}, de φ^{Ja} par la transition, de J_a vers I_a, associée au tableau k_a; sur I_b, de même, l'image, ψ^{Ib}, de φ^{Jb} par la transition associée au tableau k_b; enfin, sur I_c, une fonction ψ^{Ic} qui, en tant que fonction sur $I{\approx}I_a{\approx}I_b{\approx}I_c$, est la moyenne des deux fonctions précédentes:

$$\psi^{Ia} = \varphi^{Ja} \circ k_{Ja}{}^{Ia} \quad ; \quad \psi^{Ib} = \varphi^{Jb} \circ k_{Jb}{}^{Ib} \quad ; \quad \psi^{Ic} \approx (1/2)\,(\psi^{Ia} + \psi^{Ib}) \,.$$

Reste à appliquer à la fonction ψ^{It} la transition de I_t vers J associée au tableau k_t.

Sur J_a, on a, avec le coefficient (r/(1+r)), l'image de ψ^{Ia} par la transition associée à k_a; à quoi s'ajoute, avec le coefficient (1/(2.(1+r))), l'image de $\psi^{Ia}+\psi^{Ib}$ par la transition de $I{\approx}I_a{\approx}I_b{\approx}I_c$ vers J_a associée à k_a.

De même, sur J_b, on a, avec le coefficient (r/(1+r)), l'image de ψ^{Ib} par la transition associée à k_b; à quoi s'ajoute, avec le coefficient (1/(2.(1+r))), l'image de $\psi^{Ia}+\psi^{Ib}$ par la transition de $I{\approx}I_a{\approx}I_b{\approx}I_c$ vers J_b associée à k_b.

La fonction ξ^J, = (ξ^{Ja} , ξ^{Jb}), obtenue à partir de φ^J par double transition, prend la forme la plus simple quand on pose r=(-1/2); d'où: (r/(1+r))=-1; (1/(2.(1+r))) = 1; en sorte que ξ^{Ja} et ξ^{Jb} ne comprennent chacune qu'un seul terme, calculé par une double transition où l'on reconnaît les transitions associées au rectangle de BURT:

$$\xi^J = (\xi^{Ja}, \xi^{Jb}) \quad ;$$
$$\xi^{Ja} = \varphi^{Jb} \circ k_{Jb}{}^{I} \circ k_I{}^{Ja} = \varphi^{Jb} \circ K_{Jb}{}^{Ja} \quad ;$$
$$\xi^{Jb} = \varphi^{Ja} \circ k_{Ja}{}^{I} \circ k_I{}^{Jb} = \varphi^{Ja} \circ K_{Ja}{}^{Jb} \quad ;$$

Supposons maintenant que (φ^{Ja}, φ^{Jb}) est un couple de facteurs associés de variance 1, extrait du rectangle K, et afférent à la valeur propre Λ: on voit que la fonction φ^J = (φ^{Ja}, φ^{Jb}), obtenue en mettant bout à bout les deux fonctions, est, pour la correspondance k_t, un facteur normalisé afférent à la valeur propre $\lambda = \sqrt{(\Lambda)}$.

La fonction ψ^{It}, calculée ci-dessus, est le facteur correspondant (de variance λ) sur l'autre ensemble, I_t ; et l'on y retrouve les facteurs calculés sur les lignes et colonnes supplémentaires:

$$\psi^{It} = (\psi^{Ia}, \psi^{Ib}, \psi^{Ic}) \quad ; \quad \psi^{Ic} \approx (1/2)\,(\psi^{Ia} + \psi^{Ib}) \quad ;$$
$$\psi^{Ia} = \varphi^{Ja} \circ k_{Ja}{}^{Ia} = G^{Ia} \quad ; \quad \psi^{Ib} = \varphi^{Jb} \circ k_{Jb}{}^{Ib} = F^{Ib} \quad .$$

Il est clair que tout facteur $(\varphi^{Ja}, \varphi^{Jb})$ issu de k_t et afférent à une valeur propre λ positive est de cette forme. En effet, en reprenant le calcul ci-dessus de la double transition de J vers J, on obtient le système:

$$\lambda \,.\, \varphi^{Ja} = \varphi^{Jb} \circ K_{Jb}{}^{Ja} \quad ;$$
$$\lambda \,.\, \varphi^{Jb} = \varphi^{Ja} \circ K_{Ja}{}^{Jb} \quad ;$$

d'où il résulte que φ^{Ja} et φ^{Jb} constituent un couple de facteurs associés pour K, afférent à la valeur propre $\Lambda = \lambda^2$; ce qui établit, en même temps, que φ^{Ja} et φ^{Jb} ont une même variance, laquelle ne peut être que 1 si telle est la variance de $\varphi^J = (\varphi^{Ja}, \varphi^{Jb})$.

Mais, ayant introduit des lignes négatives, on récolte aussi, pour k_t, des valeurs propres négatives.

Reprenons le même couple $(\varphi^{Ja}, \varphi^{Jb})$, de facteurs associés de variance 1, extrait du rectangle K, et afférent à la valeur propre Λ: et posons maintenant:

$$\underline{\varphi}^J = (\underline{\varphi}^{Ja}, \underline{\varphi}^{Jb}) = (\varphi^{Ja}, -\varphi^{Jb}) \quad ;$$

il vient:

$$\underline{\psi}^{It} = (\underline{\psi}^{Ia}, \underline{\psi}^{Ib}, \underline{\psi}^{Ic}) \quad ; \quad \underline{\psi}^{Ic} \approx (1/2)\,(\underline{\psi}^{Ia} + \underline{\psi}^{Ib}) \quad ;$$
$$\underline{\psi}^{Ia} = \varphi^{Ja} \circ k_{Ja}{}^{Ia} = G^{Ia} \quad ; \quad \underline{\psi}^{Ib} = -\varphi^{Jb} \circ k_{Jb}{}^{Ib} = -F^{Ib} \quad ;$$

d'où, finalement, pour k_t, un facteur afférent à la valeur propre $-\lambda$:

$$\underline{\xi}^J = (\underline{\xi}^{Ja}, \underline{\xi}^{Jb}) \quad ;$$
$$\underline{\xi}^{Ja} = -\varphi^{Jb} \circ k_{Jb}{}^{I} \circ k_I{}^{Ja} = -\lambda \,.\, \varphi^{Ja} = -\lambda \,.\, \underline{\varphi}^{Ja} \quad ;$$
$$\xi^{Jb} = \varphi^{Ja} \circ k_{Ja}{}^{I} \circ k_I{}^{Jb} = \lambda \,.\, \varphi^{Jb} = -\lambda \,.\, \underline{\varphi}^{Jb} \quad ;$$

Comme ci-dessus pour les facteurs φ^J afférents à une valeur propre positive, on démontre que tout facteur $\underline{\varphi}^J$ afférent à une valeur propre négative est dérivé d'un couple de facteurs associés extrait du tableau K, par la formule:

$$\underline{\varphi}^J = (\underline{\varphi}^{Ja}, \underline{\varphi}^{Jb}) = (\varphi^{Ja}, -\varphi^{Jb}) \,.$$

Pour être complet, on notera que les facteurs issus de k_t afférents à la valeur propre 0 proviennent de facteurs issus de K associés à cette même valeur propre:

soit: $\varphi^J = (\varphi^{Ja}, 0)$; avec : $\varphi^{Ja} \circ K_{Ja}{}^{Jb} = 0$;

soit: $\varphi^J = (0, \varphi^{Jb})$; avec : $\varphi^{Jb} \circ K_{Jb}{}^{Ja} = 0$;

Nous conclurons donc que si, dans les formules de définition du tableau k_t posées au début du §4, on met r=(-1/2), l'analyse du tableau ainsi créé équivaut à celle du rectangle de BURT, avec les individus mis en supplément.

5 Appendice : démonstration géométrique des propriétés de corrélation entre facteurs issus du sous-tableau de BURT généralisé

L'occasion s'offre ici de reprendre, sous une forme synthétique, des propriétés démontrées dans [FAC. BURT. GÉN.].

Partons d'une correspondance k(I × J). À celle-ci est associée une loi de probabilité k_{IJ}, sur I × J; et un produit scalaire dans l'espace R^{IJ} des fonctions sur ce produit:

$$<f^{IJ}, g^{IJ}> = \sum\{f^{ij} . g^{ij} . k_{ij} \mid i \in I ; j \in J\} ;$$

où on a noté $k_{ij} = k(i, j) /k$; afin d'avoir la masse totale 1.

Dans R^{IJ}, on a les sous-espaces R^I et R^J des fonctions ne dépendant effectivement que d'une seule variable, soit i, soit j. En général, l'intersection de ces deux sous-espaces est réduite à la droite des constantes; en sorte que R^I et R^J engendrent, au sein de R^{IJ}, un espace, $L(R^I \cup R^J)$, dont la dimension est cardI+cardJ−1. Pour la structure euclidienne dont est muni cet espace, la projection orthogonale d'un des sous-espaces R^I et R^J sur l'autre est réalisée par l'une des transitions associées à la correspondance k_{IJ}:

projection sur R^J de $\varphi^I \in R^I$: $pr(\varphi^I) = \varphi^I \circ k_I{}^J \in R^J$;

projection sur R^I de $\varphi^J \in R^J$: $pr(\varphi^J) = \varphi^J \circ k_J{}^I \in R^I$

Notons $N(R^J)$, le sous-espace suppémentaire orthogonal de R^I au sein de $L(R^I \cup R^J)$: on a la somme directe orthogonale:

$$L(R^I \cup R^J) = R^I \oplus N(R^J)$$

Ceci posé, revenons aux données du §3. Aux tableaux k_a et k_b sont associés, respectivement les espaces euclidiens $L(R^I \cup R^{Ja})$ et $L(R^I \cup R^{Jb})$, avec les décopomsitions en somme directe orthogonale (où R^I est, dans les deux cas, muni de la même structure euclidienne):

$$L(R^I \cup R^{Ja}) = R^I \oplus N(R^{Ja}) \quad ; \quad L(R^I \cup R^{Jb}) = R^I \oplus N(R^{Jb}) \quad .$$

Considérons l'espace euclidien Ls, défini comme somme directe orthogonale:

$$Ls \;=\; R^I \oplus N(R^{Ja}) \oplus N(R^{Jb}) \;;$$

Au sein de Ls, sont inclus canoniquement $L(R^I \cup R^{Ja})$ et $L(R^I \cup R^{Jb})$; donc R^{Ja} et R^{Jb}. Plus précisément, ces sous-espaces ne sont pas en position d'orthogonalité; on va montrer, au contraire, que la figure qu'ils forment est précisément celle, $L(R^{Ja} \cup R^{Jb})$, associée au sous-rectangle de BURT généralisé, $K(J_a \times J_b)$. Il suffit, pour le voir, de considérer ce que sont, au sein de Ls, les projections orthogonales de chacun des sous-espaces R^{Ja} et R^{Jb} vers l'autre.

Rappelons le théorème des trois perpendiculaires, dans sa forme générale multidimensionnelle. Soient Lp et Lg des sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien Ls; Lp étant inclus dans Lg; alors la projection orthogonale de tout vecteur $x \in$ Ls sur Lp peut s'obtenir par deux projections orthogonales successives: d'abord de x sur Lg, soit y; puis de y sur Lp, soit z.

Soit à projeter sur R^{Jb} un vecteur $\varphi^{Ja} \in R^{Ja}$: puisque que R^{Jb} est inclus dans $L(R^I \cup R^{Jb}) = R^I \oplus N(R^{Jb})$, on peut d'abord projeter φ^{Ja} suivant un vecteur, ψ, de $L(R^I \cup R^{Jb})$; et, ensuite, projeter ψ sur R^{Jb}.

Or on a:

$$\varphi^{Ja} \in L(R^I \cup R^{Ja}) = R^I \oplus N(R^{Ja}) \;;$$

et, parce que Ls est la somme directe orthogonale $R^I \oplus N(R^{Ja}) \oplus N(R^{Jb})$, la projection orthogonale de $R^I \oplus N(R^{Ja})$ sur $R^I \oplus N(R^{Jb})$ n'est autre que la projection orthogonale de $R^I \oplus N(R^{Ja})$ sur R^I. Dans le cas particulier du vecteur φ^{Ja}, cette projection orthogonale sur R^I n'est autre que:

$$pr(\varphi^{Ja}) = \varphi^{Ja} \circ k_{Ja}{}^{I} = G^I \in R^I \quad .$$

La projection sur R^{Jb} d'un vecteur de R^I se fait maintenant au sein de $L(R^I \cup R^{Jb}) = R^I \oplus N(R^{Jb})$; i.e. par une transition associée à la correspondance k_b. On a donc:

$$\text{projection de } \varphi^{Ja} \text{ sur } R^{Jb} = \varphi^{Ja} \circ k_{Ja}{}^{I} \circ k_I{}^{Jb} = \varphi^{Ja} \circ K_{Ja}{}^{Jb} \;;$$

où l'on reconnaît la transition associée au sous-rectangle de BURT, $K(J_a \times J_b)$.

En procédant de même pour le projection de R^{Jb} vers R^{Ja}, on achève de montrer que l'on a, dans Ls, la disposition relative de R^{Ja} et R^{Jb} associée à K.

Dans l'espace Ls que nous avons construit, les propriétés des facteurs démontrées dans [FAC. BURT. GÉN.] apparaissent évidentes. Soient φ^{Ja} et φ^{Jb} des fonctions (qu'on peut supposer de moyenne nulle et variance 1) appartenant respectivement à R^{Ja} et R^{Jb}; leur produit scalaire est égal au produit scalaire de leurs projections respectives sur R^I: en effet les composantes transversales à R^I, dans $N(R^{Ja})$ et $N(R^{Jb})$ respectivement, sont orthogonales entre elles. On a, avec nos notations:

$$< \varphi^{Ja}, \varphi^{Jb} > \; = \; < \varphi^{Ja} \circ k_{Ja}{}^{I}, \varphi^{Jb} \circ k_{Jb}{}^{I} > \; = < G^I, F^I > \; .$$

Si φ^{Ja} et φ^{Jb} sont dès facteurs, issus de K, afférents à des valeurs propres différentes, ce produit scalaire est nul; donc F^I et G^I sont non corrélés.

Si φ^{Ja} et φ^{Jb} sont deux facteurs associés avec pour valeur propre Λ, le produit scalaire, ou covariance de F^I et G^I, vaut $\lambda = \sqrt{(\Lambda)}$. Étant projections de φ^{Ja} et φ^{Jb}, qui ont norme 1, F^I et G^I ont une norme (variance) au plus égale à 1; leur corrélation est donc $\geq \lambda$; elle peut même valoir 1, si les deux tableaux k_a et k_b sont identiques.

Références bibliographiques

A. El OUADRANI : “Généralisation du tableau de BURT et de l'analyse de ses sous-tableaux dans le cas d'un codage barycentrique”, [BURT COD. BARY.], in *CAD*, Vol.XIX, n°2, pp. 229-246; (1994).

A. El OUADRANI, Ph. NABHAN :“Corrélations entre facteurs calculés sur un ensemble d'individus d'après l'analyse d'un sous-tableau de BURT généralisé”, [FAC. BURT. GÉN.], in *CAD*, Vol.XIX, n°4, pp. 417-422; (1994).