Les Cahiers de l'Analyse des Données
Vol. XXI - 1996 - n°2 - pp.181-186.

TOUT POLYÈDRE CONVEXE EST L'INTERSECTION DE SA VARIÉTÉ LINÉAIRE SUPPORT AVEC UN SIMPLEXE

[CONVEXE - SIMPLEXE]

*M. MEÏMARIS**

...ἐμνήσθην δ' ὁσσάκις ἀμφότεροι ἥλιον ἐν λέσχῃ κατεδύσαμεν...

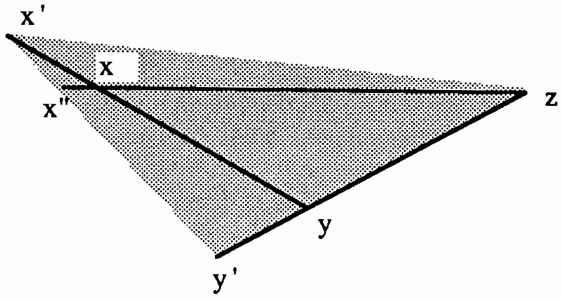
Καλλίμαχος

L'objet de la présente note est de démontrer le théorème suivant, énoncé brièvement dans le titre:

Théorème : Soit K un polyèdre convexe compact d'intérieur non-vide d'un espace affin L de dimension finie p; soit n, le nombre, supérieur ou égal à p+1, des facettes de dimension maxima, du convexe K; alors on peut construire un espace affin E, de dimension n-1, contenant L; et, dans E, un simplexe S à n faces et n sommets tel que K soit l'intersection de S avec L.

1 Rappels de propriétés des convexes: facettes et polyèdres

Avant de démontrer le *Théorème* qui nous paraît susceptible d'intéresser les géomètres traitant, en vue d'applications, notamment au graphisme sur ordinateur, divers problèmes linéaires, nous rappellerons quelques propriétés des convexes qu'il est bon d'avoir présentes à l'esprit pour suivre la démonstration.



Sur toute partie convexe K de L, et notamment tout corps convexe K, ou convexe compact (fermé et borné) d'intérieur non vide, on définit la relation de préordre: x est interne à y, notée intn(K; x, y), par la condition: le segment (x, y) peut être prolongé du côté de x, en un segment (x', y), inclus dans K. La transitivité de la relation intn, se vérifie en démontrant que si trois points x, y,

(*) Professeur Associé, Université d'Athènes, Département de Communication et des Moyens de Communication Sociale.

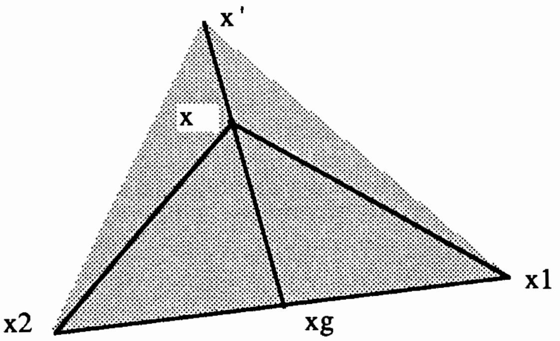
z de K, satisfont à intn(x, y) et intn(y, z), on a aussi la relation intn(x, z). Cette relation est évidente si x, y et z sont alignés; et, en général, elle se voit dans le plan (x, y, z) en considérant le triangle Tr(x', y', z), inclus dans K, où l'on peut tracer un segment (x", z), prolongeant (x, z) au-delà de x.

Comme à tout préordre, est associée à intn une relation d'équivalence (entre points de K):

$$\mathrm{fac}(K; x, y) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{intn}(K; x, y) \wedge \mathrm{intn}(K; y, x) \quad ;$$

i.e. si et seulement si le segment (x, y) peut être prolongé de part et d'autre en un segment (x', y') inclus dans K et contenant (x, y) à son intérieur.

Une classe d'équivalence de la relation *fac* est appelée *facette* de K; on vérifie que toute facette, F, est, dans sa variété linéaire support L(F), une partie convexe ouverte. La convexité est claire: car si deux points, x et y, de F sont équivalents pour *fac*, ils sont aussi équivalents à tout point du segment (x, y).

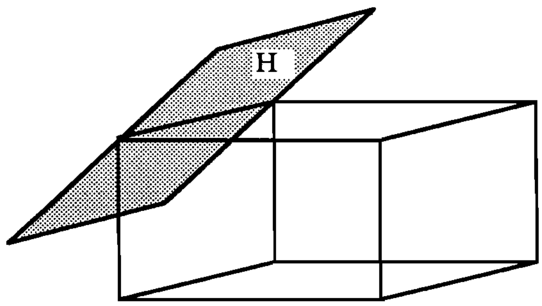


Pour montrer que F est ouverte dans L(F), considérons un point x de F et adjoignons à ce point d'autres points, x_i, de F, afin de constituer un système, $\{x, x_1, x_2, \ldots, x_r\}$, (où r désigne la dimension de L(F)), engendrant L(F) comme variété affine. Le simplexe fermé ayant ces points pour sommets est inclus dans F (du fait de la convexité de F); et, en particulier, le centre de gravité, x_g, de la face opposée à x. Sur le segment (x_g, x) au delà de x, on peut prendre un point x', appartenant à F; et le simplexe $\{x', x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ est, pour la topologie de L(F), un voisinage de x inclus dans F.

En particulier, l'intérieur de K est l'unique facette de dimension maxima et son support est L; les autres facettes, formées de points de la frontière de K, peuvent être appelées: facette frontière.

On conviendra ici d'appeler face toute facette de K dont la dimension est celle de K diminuée de 1. On montre facilement que si F est une face de K, le support L(F) est un hyperplan de L, dont l'intersection avec K est la fermeture de F; et que L(F) est la frontière d'un demi-espace de L contenant K.

En terme de facettes, on définit simplement, en toute dimension, la notion de polyèdre comme étant un corps convexe qui a un nombre fini de facettes. Un polyèdre ayant r faces n'est autre que l'intersection des r demi-espaces limités par les supports de ses faces et contenant K; et cette description de K est unique, en ce sens que si K est l'intersection d'un famille finie de demi-espaces, il y a nécessairement, parmi ceux-ci, tous les demi-espaces associés à une face de K. [Un commentaire de ce fait sera proposé à la fin du §1 dans le cadre général du *Théorème*].

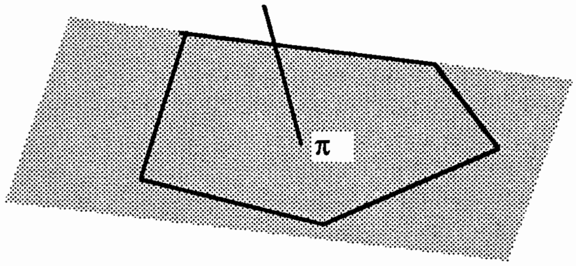


Si f est une facette d'un polyèdre K, il passe par son support L(f) un hyperplan H de L dont l'intersection avec K n'est autre que la fermeture de f; et H est frontière d'un demi-espace contenant K. [Sur la figure, K est un parallélépipède, dont f est une arête.]

Dans le cas d'une boule K sphérique (ou plus généralement hypersphérique), les facettes, autres que l'intérieur de K, ont dimension 0 et ce sont les points de la sphère frontière de K. La considération de diverses figures convexes, de dimension 2 ou 3, dont la frontière est constituée par des portions de droite, de plan, de cercle, de sphère ou de cylindre, permet d'écarter l'hypothèse qui généraliserait à tout corps convexe les propriétés des polyèdres énoncées ci-dessus.

Si, selon l'énoncé du *Théorème*, K est obtenu dans L comme une intersection d'une famille de demi-espaces, d'un espace ambiant E, il faut un demi-espace pour chaque face de K: car soit une face F et m intérieur à F si l'hyperplan-frontière d'un des demi-espaces passe par m, son intersection avec L doit s'identifier au support L(F), faute de quoi, il brise la face; mais d'autre part les demi-espaces de E dont la frontière ne passe pas par m délimitent, dans L, un convexe pour lequel m est point intérieur. Il faut donc au moins autant de demi-espaces de E qu'il y a de faces de K.

De plus, les demi-espaces qui ne coupent pas L suivant un support de face sont superflus: car, en partant d'un point π intérieur au convexe K, dans la direction d'une demi-droite, on rencontre nécessairement la frontière de K en

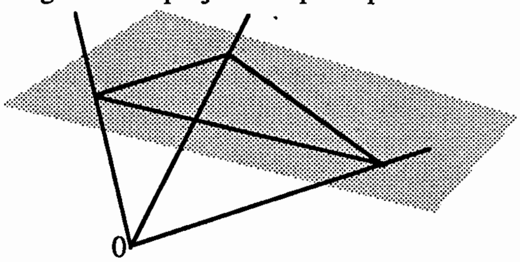


un point qui appartient à la fermeture d' au moins une face; et le demi-espace correspondant [en gris sur la figure, où K est un polygone plan] délimite correctement la partie de la demi-droite qui est dans K. Bref, K est l'intersection des demi-espaces associés aux faces; chacun de ceux-ci est nécessaire; et tout autre est inutile.

Ces premières considérations montrent que le nombre n des faces de K détermine la dimension du simplexe que nous devons chercher et, *ipso facto*, de l'espace ambiant à construire.

2 Constructions en géométrie projective sphérique

Si K est un carré, on rencontre, dans la démonstration du *Théorème*, la difficulté que trois droites portant chacune un côté du carré ne forment pas un triangle; de même, 4 plans, dont chacun porte une face d'un cube (ou d'un parallélépipède), ne forment pas un tétraèdre, etc. Afin d'éviter ces cas et toute discussion de même sorte sur la disposition d'un système d'hyperplans, de demi-espaces etc, les constructions que requiert la démonstration sont préparées en géométrie projective sphérique.



De façon précise, on introduit un point centre, 0, dans un espace vectoriel L0 contenant L, qui est un hyperplan affin de L0; et on considère des figures formées de demi-droites issues de 0: un convexe compact est identifié à un cône convexe strict, i.e. ne contenant pas de droite. Un simplexe s'identifie à un cône simplicial, i.e. à l'intersection d'un système de demi-espaces en position générique (condition définie par la dimension de l'intersection des hyperplans; ou par l'indépendance des formes linéaires qui en donnent les équations). [Sur la figure, L, de dimension 2, est en gris.]

On étendra L0 en un espace vectoriel E0; et seulement à la fin des constructions on se restreindra à un hyperplan affin E de E0, avec E $\supset$ L. [Déjà les considérations qui terminent le § précédent se font aussi bien en géométrie affine, dans L, qu'en sphérique, dans L0.]

Supposons que l'ensemble des faces de K est indicé par i $\in$ I: $\{F_i \mid i \in I\}$.

On note dans L0: hyperplan h°i0, engendré par 0 avec le support de la face F_i de K); demi-espace h+i0, ayant pour frontière h°i0 et contenant K; son équation est une forme linéaire f_i telle que h+i0 = $\{v \mid v \in L0, f_i(v) \geq 0\}$.

Il faut agrandir L0, en un E0, afin que les h+i0 deviennent des intersections de demi-espaces H+i0, de E0, avec L0; et que ces H+i0 soient en position générique dans E0; en sorte que leur intersection soit un cône simplicial.

Si K est un simplexe, les h+i0 sont déjà en position générique il n'y a rien à faire: le problème commence quand le nombre n = cardI, des faces de K, dépasse dim(L) + 1 = p+1= dim(L0).

Au moins, on peut en extraire un sous-système, comprenant p+1 des h+i0, qui soit en position générique; i.e., p+1 demi-espaces associés à des formes linéaires f_i indépendantes sur L0: car autrement, tous les h°i0 auraient au moins en commun, dans L0, une droite Δ: et si Δ coupait L suivant s, K, comme intersection de demi-espaces dont la frontière contient s, serait, dans son support L, un cône de sommet s, non compact; ou bien, si Δ était parallèle à L, K serait une réunion de droites parallèles à Δ; donc, de même, un convexe non compact, contrairement à l'hypothèse.

On prend donc un système {h+i0}, qui sont en position générique (les formes linéaires f_i sont indépendantes). On peut supposer que ce système est indicé par i variant de 1 à p+1; et il reste les autres h+i0, dont l'indice i varie de p+2 à n.

On ajoute alors à L0 des vecteurs v_i, pour i variant de p+2 à n; et ces vecteurs, avec L0, engendrent un espace E0, de dimension n (nombre des faces - i.e. des facettes de dimension maxima - de K).

Il faut étendre les h_i en des H_i; autrement dit, prolonger les formes f_i, définies sur L0 en des formes définies sur E0 tout entier. On doit d'abord demander que sur L0 on garde les mêmes valeurs (pour bien définir K), c'est ce que veut dire prolonger: il reste à donner des valeurs aux $f_i(v_{i'})$: on les prend tous nuls, excepté les $f_i(v_i) = 1$; (pour i de p+2 à n).

Il est clair qu'ainsi les demi-espaces H+i0 sont en position générique, car une combinaison linéaire des f_i ne peut être nulle sur E0 que si elle est nulle sur L0 et sur chacun des v_i , (i de p+2 à n). La dernière condition impose que les f_i (i de p+2 à n) ne rentrent pas dans la combinaison avec des coefficients non nuls. Il reste à considérer une combinaison formée seulement des f_i (1 à p+1); et, ici, la première condition impose des coefficients nuls, du fait de la généricité sur L0.

On a donc résolu le problème en géométrie sphérique: dans E0 les H+i0 définissent un cône simplicial S0 qui coupe L suivant K. Il reste à restreindre E0 à un hyperplan affin E, passant par L et coupant effectivement L suivant un simplexe S (la condition que l'intersection soit K est assurée trivialement pourvu que E contienne L).

Dans E0, on a un sous espace vectoriel, L', parallèle à L, passant par 0; L' touche le cône simplicial S0 en son sommet 0; mais n'a pas d'autre point commun avec lui; car soit m un tel point, x un point quelconque de K, donc de S0; S0 contient la demi-droite 0m, d'origine 0; et aussi la demi-parallèle à 0m issue de x qui serait dans K, contrairement à l'hypothèse de compacité. Il suffit donc de prendre un hyperplan d'appui E' à S0 en 0; E' passant par L' et ne touchant S0 qu'en 0: le sous-espace affin E, parallèle à E' et passant par L coupe le cône S0 suivant un simplexe S qui nous convient. Ce qui achève la démonstration du *Théorème*.

Remarque : dans cette dernière partie de la démonstration, nous avons dû laisser le lecteur exercer, seul, son intuition, sans le secours d'une figure. En effet, le cas non trivial le plus simple est celui où L est de dimension 2, mais où K est un quadrilétère, non un triangle. L'espace ambiant, E0, à construire pour L0, est de dimension 4, non représentable. Toutefois, en réduisant E0 à E, on se trouve, finalement, en dimension 3: il est d'ailleurs bien connu qu'on obtient un quadrilatère convexe en coupant un tétraèdre par un plan séparant deux arêtes opposées. Le cas qui, en complexité, vient immédiatement après, est celui d'un pentagone convexe, K, du plan L: on doit obtenir K comme intersection de L avec un simplexe S, à 5 sommets, d'un espace affin E, quadridimensionnel, ambiant à L.

Référence bibliographique

J.-P. BENZÉCRI : "Sur les variétés localement affines et localement projectives"; in *Bulletin de la Société Mathématique de France*; Vol 88, pp. 229-332 ; (1960); on trouve, au ch. 3 de ce mémoire, les éléments de théorie des corps convexes utilisés dans l'exposé du présent article.